Mathématiques Financières Approfondies

L3 – Economie – Le Mans Université

Notes basées sur le cours de Emmanuel Temam, Rahim Bah et Pierre Devolder

Christophe Dutang

http://dutangc.free.fr

Année scolaire 2016-2017

Table des matières

Chapitre 1

Marchés financiers

Le Marché Financier est le marché sur lequel s'échangent les valeurs mobilières (à l'opposé des valeurs immobilières) : actions, obligations et titres dérivés (certificats d'investissement, titres participatifs, warrants. . .).

1.1 Vocabulaire

Définition 1.1.1 (Titre)**.** *Un titre financier est un contrat où les parties s'échangent des flux d'argent.*

Définition 1.1.2 (Marché)**.** *Un marché financier est un lieu où l'on achète et vend des titres financiers. Les opérateurs de marché sont le plus souvent autorisés à vendre à découvert ("short selling") des titres qu'ils ne possèdent pas ! Vendre un titre à découvert signifie s'engager à en verser les revenus à l'acquéreur.*

Définition 1.1.3 (Valeur)**.** *La valeur d'un titre financier est un montant positif ou négatif, qui représente l'enrichissement ou l'appauvrissement des flux futurs. Rien ne garantit a priori que la valeur d'un titre soit unique : il existe souvent plusieurs méthodes de valorisation.*

Définition 1.1.4 (Prix)**.** *Le prix d'un titre est un montant convenu entre deux parties en échange du titre. Le plus souvent c'est l'acheteur qui verse le montant, mais il arrive que le vendeur doive payer l'acheteur pour que celui-ci accepte un titre qui lui causera des pertes. Le prix n'est pas forcément égal à la valeur : tout le monde n'a pas la même anticipation de l'avenir.*

1.2 Produits financiers

Il existe quatre grands types de produits financiers

- Action
- Obligation
- Contrat à terme
- Produit conditionnel : options, bons, warrants.

1.2.1 Les actions

Définition 1.2.1 (Action)**.** *Une action est un titre de propriété représentant une fraction du capital d'une entreprise et donnant à son porteur le droit de vote aux assemblées, le droit à l'information et le droit aux bénéfices (nommé dividende).*

Il existe en réalité une très grande diversité d'actions dont nous présentons ici quelques exemples.

Exemple 1.2.2 (Action classique)**.** *Très répandu, ce titre de propriété s'acquière contre de l'argent soit au moment de la création de l'entreprise ou d'augmentations de capital soit directement sur le marché boursier. Elle est source de trois droits : (i) un droit au pouvoir -via un droit de vote lors des assemblées générales ; (ii) un droit à l'information ; (iii) un droit au résultat -sous forme de dividendes-. En effet, si la société réalise des bénéfices, l'actionnaire en recevra une partie au prorata du nombre d'actions qu'il possède. Depuis novembre 1984, les actions sont dématérialisées. Le papier a laissé place au code Sicovam stocké dans un énorme ordinateur. Un des avantages de cette dématérialisation est le renforcement de la sécurité : impossible de se faire voler ses titres.*

Exemple 1.2.3 (Action privilégiée)**.** *Elle offre un privilège qui peut être une priorité lors des votes dans les assemblées générales ou une priorité lors de la distribution du dividende.*

Exemple 1.2.4 (Action à dividende prioritaire)**.** *Les ADP ont été créées en 1978. Elles confèrent à leur détenteur un accès privilégié aux dividendes, mais pas de droit de vote. Elles présentent un rendement plus élevé que l'action ordinaire sans offrir le droit de vote. Dès que le profit est positif, le dividende versé doit égaler au moins 7.5% de la valeur nominale de l'action. Sinon (profit négatif ou insuffisant), le versement du dividende doit être reporté sur les deux exercices suivants.*

Exemple 1.2.5 (Certificat)**.** *Les certificats d'investissement sont des titres sans droit de vote (apparus après les nationalisations de 1981). L'objectif était de permettre des prises de participation par le public dans les entreprises nationalisées sans pour autant modifier l'actionnariat et faire perdre des voix à l'actionnaire principal, à savoir l'Etat. Ces titres peuvent aussi bien être émis par des entreprises publiques que privées. Certificat d'Investissement + Droit de vote = Action.*

Exemple 1.2.6 (Action à bons de souscription)**.** *Ce sont des actions qui donnent droit à leur détenteur de souscrire à de nouvelles actions à une date donnée. Elles sont en général, plus chères qu'une action classique.*

1.2.2 Les obligations

Définition 1.2.7 (Obligation)**.** *Les obligations sont des titres de créances représentatifs de dettes. Une obligation donne droit au paiement d'un intérêt en général annuel et au remboursement du capital. Le détenteur d'une obligation perçoit un revenu connu à l'avance ou dont la révision se réalise dans les conditions prévues au moment de l'émission. En cas de faillite de l'émetteur, le détenteur d'une créance est prioritaire sur l'actionnaire. Les obligations peuvent être émises par les entreprises privées ou publiques, ainsi que par l'Etat, les administrations publiques et les collectivités locales.*

Définition 1.2.8 (Valeur nominale)**.** *La valeur nominale d'une obligation est celle qui sert de base au calcul de l'intérêt en général annuel versé (le coupon). Le coupon est alors égal au taux facial (fixé à l'émission) multiplié par le nominal.*

Définition 1.2.9 (Prix d'émission)**.** *Le prix d'émission est le montant du versement demandé au souscripteur lors de l'émission de l'obligation. Lorsque le prix d'émission est égal à la valeur nominale de l'obligation, l'émission est dite au pair. Mais l'obligation peut être émise soit en dessous (cas le plus fréquent), soit au-dessus de la valeur nominale. La différence entre la valeur nominale et le prix d'émission constitue alors la prime d'émission.*

Définition 1.2.10 (Valeur de remboursement)**.** *La valeur de remboursement est le montant perçcu par l'obligataire en remboursement de son prêt. Lorsque la valeur de remboursement est égale à la valeur nominale, le remboursement est dit au pair. Mais la valeur de remboursement peut différer de la valeur nominale. La différence constitue alors la prime de remboursement.*

La possibilité de verser des primes d'émission et/ou de remboursement permet notamment à l'émetteur de prendre en compte une évolution des taux du marché entre le montage du placement et l'émission effective.

Définition 1.2.11 (Annuité)**.** *L'annuité est le flux total versé chaque année par l'émetteur à l'ensemble des obligataires, c'est-à-dire la somme des intérêts et des flux éventuels de remboursement du principal.*

Le remboursement de l'obligation peut être réalisé selon trois modalités principales différentes.

1. Le remboursement in fine : le remboursement est réalisé en une seule fois, le dernier jour de la durée de vie de l'obligation. A l'exception de la dernière année de vie de l'obligation, l'annuité n'est donc composée que des seuls intérêts versés chaque année par l'émetteur.
2. Le remboursement par séries ou par tranches annuelles égales : chaque année, une partie de l'emprunt est remboursée. Un même nombre de titres, tirés au sort, est remboursé chaque année. Le montant de l'annuité diminue avec le temps, puisque l'intérêt sur le capital restant dû diminue.
3. Le remboursement par annuités constantes : l'annuité est constante. Aussi, puisque le montant de l'intérêt sur le capital restant dû diminue, l'émetteur rembourse chaque année (par tirage au sort), une part croissante du principal. On distingue plusieurs catégories d'obligations qui répondent à des attentes différentes.

Exemple 1.2.12 (obligations ordinaires)**.** *Les obligations ordinaires sont des obligations à taux fixe dont le coupon versé en général une fois par an est identique sur toute la durée de vie du titre. Notons que ces titres sont vulnérables au risque d'inflation.*

Exemple 1.2.13 (obligations à taux flottants)**.** *Les obligations à taux flottant sont composées des obligations à taux variable et à taux révisable. Leur particularité est d'offrir une rémunération (taux d'intérêt) qui varie dans le temps en référence à une moyenne de taux constatés sur le marché. Les titres à taux révisable versent un intérêt périodique qui est calqué sur l'évolution récente des marchés alors que ceux à taux variables procurent une rémunération calculée comme une moyenne des conditions offertes par le marché jusqu'au jour de détachement du coupon.*

Exemple 1.2.14 (obligations indexées)**.** *Les obligations indexées sont des titres dont la valeur de remboursement et/ou les intérêts sont liés à l'évolution d'un indice de référence. En particulier, le rendement de certains emprunts est calqué sur l'inflation. Ainsi, le Trésor français a procédé, pour la première fois en septembre 1998, à l'émission d'une OAT (Obligation Assimilable du Trésor) indexée sur l'inflation : l'OATi. Ce titre est une obligation à taux fixe dont tous les flux sont payés en appliquant un coefficient d'indexation égal à l'évolution de l'inflation entre la date initiale et la* *date de paiement du flux. L'OATi n'est dès lors sensible qu'à l'évolution des taux d'intérêt réels (taux d'intérêt nominaux moins taux d'inflation). Ce produit financier offre une protection contre les risques d'inflation non anticipée.*

Prenons un exemple. Une obligation à 10 ans d'une valeur nominale de 1000 euros, remboursée au pair in fine, et ayant un taux facial de 10% rapporte chaque année 100 euros auxquels il faut rajouter le remboursement du principal (1000 euros) à l'issue de la 10ème année. Imaginons que le détenteur de cette obligation souhaite la revendre sur le marché avant l'échéance, à un moment où le taux facial pratiqué sur les nouvelles émissions d'obligations est de 15%. Au taux du marché, une obligation de valeur nominale égale à 1000 euros rapporte chaque année 150 euros ; par conséquent, personne n'acceptera d'acheter 1000 euros un titre ne rapportant que 100 euros d'intérêt annuels. Pour revendre son titre, le détenteur de l'obligation doit consentir une baisse du prix de facçon à ce que, pour

L'acheteur, la rémunération soit identique à celle du marché, ici 15%. Le vendeur devra vendre son obligation au prix d'une obligation de nominal 667e. Nous avons ainsi mis en évidence une relation décroissante entre le prix d'une obligation et le niveau des taux d'intérêt. Il en résulte pour l'acquéreur d'une obligation un risque de taux d'intérêt, c'est-àdire une risque de moins-value à la revente en cas de hausse des taux.

Comme pour les actions, existent dans la catégorie des obligations des titres hybrides, se situant en réalité à mi-chemin entre les obligations et les actions. Il s'agit par exemple des obligations à bon de souscription d'obligation (OBSO), des obligations convertibles en actions (OCA) ou des titres participatifs. Ces derniers sont assimilés à des quasi-fonds propres ; ils sont en principe non remboursables et procurent à leurs détenteurs une rémunération qui est pour partie fixe et pour partie variable indexée à un indicateur de performance de la société (chiffre d'affaires, résultat net...).

1.2.3 Les contrats à terme

Les produits à terme regroupent les contrats à terme, les contrats de gré à gré et les produits swaps.

Définition 1.2.15 (Contrats à terme)**.** *Un contrat à terme (futures en anglais) est un engagement ferme de livraison standardisé, dont les caractéristiques sont connues à l'avance, portant sur*

— *une quantité déterminée d'un actif sous-jacent précisément défini,*
— *à une date, appelée échéance, et un lieu donnés,*
— *et négocié sur un marché à terme organisé.*

1.2.4 Les produits conditionnels

Les produits conditionnels regroupent les options, les produits dérivés, les warrants et les dérivés de crédit (CDS). Il existe d'autres produits échangés sur les marchés. Tout d'abord les matières premières (appelée également commodity) comme l'or, le pétrole, les produits agro-alimentaires, etc.... D'autre part, il y les devises : euro, dollar, yen, etc. Une autre gramme de produit est la famille des produits dérivés.

Définition 1.2.16 (Produit dérivé)**.** *Un produit dérivé ou contrat dérivé (derivative product en anglais) est un instrument financier :*

- *dont la valeur fluctue en fonction de l'évolution du taux ou du prix d'un produit appelé sous-jacent ;*
- *qui ne requiert aucun placement net initial ou peu significatif ; — dont le règlement s'effectue à une date future.*

1.3 Le marché boursier

Ce sont les sociétés de bourse qui sont le passage obligé de l'investissement en bourse car elles détiennent le monopole des transactions boursières. Jusqu'en 1988 c'étaient des offficiers ministériels (les agents de change) qui détenaient ce monopole. Cependant le crack de 1987 est venu modifier cette organisation et les agents de change se sont transformés en sociétés de bourse.

La société de bourse Euronext a pour mission de veiller au bon déroulement de la cotation des valeurs, elle peut intervenir pour interrompre la cotation, notamment dans le cas d'irrégularités ou d'événements propres à engendrer une spéculation injustifiée (OPA, OPE,...). Une autre de ses missions et d'assurer le calcul et la cotation des indices (ex : CAC 40) ainsi que d'assurer la promotion de la place parisienne en France et à l'étranger. Le 22/09/2000, les bourses d'Amsterdam, de Bruxelles et de Paris ont fusionné, créant une place financière transnationale baptisée Euronext. Le 06/02/2002, la bourse portugaise BVLP est pour sa part devenue Euronext Lisbonne, au même titre que Euronext Paris, Euronext Amsterdam et Euronext Bruxelles. Euronext constitue donc désormais un marché transfrontalier d'actions, d'obligations, de produits dérivés et de marchandises totalement intégré. Euronext s'occupe des opérations de compensation du marché à terme et du marché des options négociables depuis la fusion avec MONEP et MATIF.

1.4 Autorité des marchés financiers

Créée en 2003, l'autorité des marchés financiers (AMF) est issue de la fusion de plusieurs organismes : la Commission des opérations de bourse (COB) ; le Conseil des marchés financiers (CMF) ; le Conseil de discipline de la gestion financière (CDGF). L'Autorité des marchés financiers est un organisme public indépendant qui a pour missions de veiller :

- à la protection de l'épargne investie dans les instruments financiers et tout autre placement donnant lieu à appel public à l'épargne ;
- à l'information des investisseurs ;
- au bon fonctionnement des marchés d'instruments financiers. Ses principales compétences portent sur :
- Les opérations et l'information financières : l'AMF réglemente et contrˆole l'ensemble des opérations financières portant sur des sociétés cotées : introductions en bourse, augmentations de capital, offres publiques, fusions... et veille au bon déroulement des offres pu-

bliques boursières. Elle vérifie que les sociétés publient, en temps et en heure, une information complète et de qualité, délivrée de manière équitable à l'ensemble des acteurs.

— Les produits d'épargne collective : elle autorise la création de SICAV et de FCP. Elle vérifie notamment l'information figurant dans le prospectus simplifié de chaque produit qui doit être remis au client avant d'investir.

— Les marchés et leurs infrastructures : l'Autorité des marchés financiers définit les principes d'organisation et de fonctionnement des entreprises de marchés (comme Euronext Paris) et surveille les marchés et les transactions qui s'y déroulent.

— Les professionnels (établissements de crédit autorisés à fournir des services d'investissement, entreprises d'investissement, sociétés de gestion, conseillers en investissement financier, démarcheurs, etc.). L'AMF détermine les règles de bonne conduite et les obligations que doivent respecter les professionnels autorisés à fournir des services d'investissement ou des conseils en investissement.

1.5 Le marché des obligations

Sur ce marché, on va distinguer le marché primaire et le marché secondaire. Le marché primaire est celui qui concerne les nouveaux emprunts émis par l'Etat, les collectivités locales et les entreprises, auxquels peuvent souscrire les particuliers. Le marché secondaire est le marché de l'occasion. C'est le marché sur lequel s'échangent les valeurs déjà émises. Il est tout autant accessible aux particuliers.

1.6 Le marché des actions

Le marché Français des actions peut lui-même être subdivisé en plusieurs en sous éléments. On distingue : le marché officiel comprenant le marché à Règlement mensuel -et le marché au comptant ou à règlement immédiat ; le second marché ; le nouveau marché ; le marché hors cote.

1. Le marché officiel
   Les entreprises souhaitant s'introduire sur le marché officiel doivent satisfaire à diverses conditions. Elles doivent entres autres : (i) mettre à la disposition du public 25% au moins de leur capital ; (ii) avoir versé un dividende au cours des trois derniers exercices, lesquels doivent avoir été bénéficiaires ; (iii) avoir un chiffre d'affaires supérieur à 100 millions d'euros ; (iv) s'engager à publier régulièrement des informations.
2. Le marché à règlement mensuel
   C'est sur ce marché que sont cotées les actions des entreprises les plus importantes. Il s'agit d'un marché à terme. Il existe donc un délai entre la conclusion du contrat (achat et vente) et son exécution (livraison des titres et paiement). En effet, toutes les opérations effectuées au cours du mois sont dénouées le jour de liquidation (6ème jour de bourse). Le planning est le suivant : — 1er jour de liquidation : liquidation générale de toutes les opérations réalisées pendant le mois boursier. Il marque la fin du mois boursier. — 2eme jour de liquidation : il est procédé aux opérations de report. Il marque le début du mois boursier suivant. — 3eme au 6eme jour de liquidation : livraisons des titres et règlements selon un calendrier fixé par la SBF. Vous pouvez ainsi acheter une action de la société Alpha 100 Euros le 10 Mars et

la revendre 110 e le 15 Mars sans constater de sortie d'argent sur votre compte en banque. Vous encaissez les 10 e de plusvalue à la liquidation boursière. En d'autres termes, il n'y a pas de concordance entre le mois boursier et le mois calendaire et il est possible de vendre des actions que l'on ne possède pas. Les opérations peuvent être dénouées de trois manières différentes : — attendre la liquidation et procéder au règlement, en titres et en capitaux ; — effectuer, avant la date de liquidation, une opération en sens inverse (les spéculateurs à la hausse achète pour revendre). — se faire reporter, c'est à dire demander à ce que le règlement et la livraison des titres s'effectue à la liquidation suivante (estimant que nos prévisions se réaliseront le mois suivant).

3. Le marché au comptant (RI)
   Sur ce marché, toutes les opérations sont réalisées au comptant.
4. Le second marché
   Ouvert en 1983, il est destiné à recevoir des entreprises de taille modeste mais dont les perspectives sont attrayantes. Les conditions d'admission sont moins restrictives que sur le Marché Officiel. Les entreprises souhaitant s'introduire au second Marché doivent satisfaire les critères suivants : mettre à la disposition du public 10% au moins du capital ; présenter 2 années de comptes certifiés. Les obligations d'information sont en revanche réduites.
5. Le Nouveau Marché
   Le Nouveau Marché, ouvert en février 1996, est un marché autonome, régie par une société propre : la société du Nouveau Marché (filiale de la SBF). Il s'adresse à des sociétés européennes, jeunes, innovatrices, à fort potentiel de croissance, qui ont un besoin de capitaux important pour se développer. Les conditions d'admissions sont peu contraignantes, mais les sociétés candidates doivent respecter des règles strictes d'information. Le fonctionnement du Nouveau Marché est assuré par des intermédiaires financiers agrées par la société du Noveau Marché : — les introducteurs teneurs de marché assurent l'introduction des sociétés et la tenue du marché de leurs titres (cotation permanente des divers titres) — les négociateurs courtiers : ils exécutent les ordres de leurs clients ou les leurs propres. — les compensateurs : dénouent les opérations effectués.
6. Le Marché Hors Cote
   C'est un marché de moindre importance, réservé aux petites entreprises, ou à celles qui ont été rétrogradées du comptant ou du RM... Il s'agit d'un marché étroit, c'est à dire que le volume des transactions y est faible. Les conditions d'admission sur ce marché y sont simples puisque n'importe quelle société peut y être admise à condition de présenter les trois derniers bilans.
7. Les Marchés Dérivés
   Il s'agit des marchés de produits dérivés dont font partie entre autre les contrat à terme et les options. De plus amples explications sont disponibles dans la description des produits traités sur les marchés.

Chapitre 2

Notions de taux d'intérêts

2.1 Introduction

Pour nous guider dans notre choix d'allocation, nous allons utiliser des modèles théoriques, reposant sur les principes de l'actualisation. Une des notions centrale dans l'actualisation est l'intérêt.

Définition 2.1.1 (Intérêt). *L'intérêt est le loyer de l'argent. Pour un consommateur, l'intérêt est le prix à payer pour la jouissance immédiate d'un bien de consommation (ex : automobile, appartement). Pour un épargnant, l'intérêt est la récompense pour la remise à plus tard de cette jouissance.*

Ce taux est une fonction

— (i) du temps (croissante) : si l'investisseur se prive de consommer longtemps, alors le contrepartie sera d'autant plus grand.
— (ii) du risque (croissante) : il y a un risque de contrepartie, l'emprunteur peut faire défaut ; plus l'emprunteur fait prendre de risque, plus le taux est élevé.
— (iii) des conditions économiques en général (si le prêteur a possibilité de placer son argent à 4.5%, il n'acceptera pas de prêter à moins) et notamment de l'inflation anticipée (le prêteur voudra au terme de ses engagements au moins être en mesure d'acquérir les biens dont il se prive, si les prix ont monté).

Autrement dit Taux d'intérêt = taux d'inflation anticipée + prime de risque + prix du temps.

En France, en 1996, l'inflation anticipée est 2%, le taux sans risque à 1 an est de 4% et le taux sans risque à 10 ans de 6,65%.

La demande : les demandeurs sont soient les particuliers pour des biens de consommation, soient des entreprises pour de l'investissement. L'offre : les acteurs de l'offre sont les banques (et donc les individus !), les fonds de pension, etc.

2.2 Intérêts simples

Définition 2.2.1 (Intérêt simple)**.** *L'intérêt est dit simple lorsqu'il est calculé à chaque période seulement sur la base de la somme (prêtée ou empruntée) à l'origine. Autrement dit, l'intérêt est simple lorsque son calcul est proportionnel à la durée du placement.*

Définition 2.2.2 (Taux périodique proportionnel)**.** *Le taux périodique proportionnel i_p est égal au taux nominal i divisé par le nombre d'échéances dans l'année.*

Règle de calcul 2.2.1. *Les intérêts peuvent être*

— *postcomptés (ou classiques) : les intérêts sont payés à l'échéance du prêt ou de l'emprunt.*

— *précomptés : les intérêts sont payés ou à payer immédiatement au moment du prêt ou de l'emprunt.*

Notation

— *V_0 la valeur actuelle (de départ) et V_t la valeur finale ou acquise,*

— *T le nombre de période dans l'année (360 jours, 24 quinzaines, 12 mois, etc...),*

— *t le nombre de périodes considérées (jours, mois, année),*

— *i le taux nominal (par an).*

Le taux périodique proportionnel est $i_p = \frac{i}{T}$. La valeur finale se déduit par

— *postcomptés $V_t = V_0(1 + ti_p)$.*

— *précomptés $V_0 = V_t(1 - ti_p)$.*

Exemple 2.2.3. *Un épargnant place 20 000€ pendant 3 ans au taux nominal de 12% l'an. C'est à dire $V_0 = 20000$, $T = 1$, $i = 12\% = i_p$.*

— *au bout d'un an, les intérêts simple postcomptés sont $i_pV_0 = 2400$. Donc $V_t = V_0(1 + 3i_p) = 27200$.*

— *pour des intérêts précomptés, la valeur terminale est $V_t = V_0/(1 - 3i_p) = 31250$.*

Exemple 2.2.4. *Un épargnant place 10 000€ pendant 6 mois au taux nominal de 12% l'an. Autrement dit $V_0 = 10000$, $T = 12$, $i = 12\%$ et $i_p = 1\%$. Si les intérêts sont postcomptés, $V_t = V_0(1 + 6i_p) = 10600$ pour $t = 6$. Si les intérêts sont précomptés, $V_t = V_0/(1 - 6i_p) = 10638.3$ pour $t = 6$.*

Exemple 2.2.5. *On réalise un investissement de 3500e à un taux d'intérêt nominal de 7%. La rémunération doit se faire sur 14 ans. Quel est l'intérêt versé en premier période ? Quel est l'intérêt total au bout de 12 ans ?Quel est le capital final ? Ona $V_0 = 3500, i = 7\% = i_p$ ($T = 1$). Au bout d'un an, le montant d'intérêt est $V_0i_p = 245$. Au bout de 12 ans, $V_0i_p12 = 2940$. Enfin $V_{14} = V0(1 + 14i_p) = 6930$.*

2.3 Intérêts composés

Définition 2.3.1 (Intérêts composés)**.** *le taux d'intérêt est dit composé lorsqu'à la fin de chaque période l'intérêt s'ajoute au capital de début de période pour former la base de calcul de l'intérêt pour la période suivante. Le montant d'intérêt et le capital changent à chaque période*

Définition 2.3.2 (Taux périodique équivalent)**.** *Le taux périodique équivalent i_e est un taux d'intérêt infra-annuel financièrement exact au taux nominal annuel et vaut $i_e = (1+i)^{1/n} - 1$ où n le nombre de fractionnements dans l'année.*

Règle de calcul 2.3.1. *Notation*

— *V_0 la valeur actuelle (de départ) et V_t la valeur finale ou acquise,*

— *T le nombre de période dans l'année (360 jours, 24 quinzaines, 12 mois, etc...),*

— *t le nombre de périodes considérées (jours, mois, année),*

— *i le taux nominal.*

Le taux périodique équivalent est $i_e = (1+i)^{1/T} - 1$. La valeur finale se déduit par $V_t = V_0(1+i_e)^t$.

Exemple 2.3.3. *Un épargnant place 20 000€ pendant 3 ans au taux composé de 12% calculé tous les mois. Autrement dit $V_0 = 20000$, $T = 12$, $i = 12\%$, $i_e = 0.9488793\%$. Le capital final est $V_{36} = V_0(1+i_e)^{36} = 28098.56$.*

Exemple 2.3.4. *Quel est le taux d'intérêt composé d'un placement ayant porté 10000€ à 18041.44€ en trois ans ? On sait que $V_3 = 10000 = V_0(1+i_p)^3$. Donc $(V_3/V_0)^{1/3} - 1 = i_p = 21.7\%$.*

2.4 Convention des durées

Par convention, l'année est l'unité temporelle habituelle (t est donc en année). Le calcul ne pose pas de problèmes pour les années entières. Mais diverses conventions existent pour des durées inférieure à l'année. La fraction de l'année se calcule par

$$d = \frac{\text{nb jours du contrat}}{\text{nb jours de l'année}} = \frac{nb_c}{nb_a}.$$

Traditionnellement, on exclut le dernier jour et on inclut le premier jour dans le calcul du numérateur. Le numérateur et le dénominateur peuvent se calculer de 3 façons différentes

— exact : il s'agit du nombre exact de jours de la durée.

— 360 : chaque mois comprend 30 jours, une année est donc 24 quinzaines.

— 365 : chaque mois comprend 30 ou 31 jours sauf février 28 jours.

Considérons un capital de 10000€ placé au taux de 6% entre le 15 février 2012 et le 30 juin 2012. Le nombre de jour au numérateur est donné dans le tableau suivant.

Mois	exact	365	360
février	29-15+1=15	28-15+1=14	30-15+1=16
mars	31	31	30
avril	30	30	30
mai	31	31	30
juin	30-1=29	30-1=29	30-1=29
total nb_c	136	135	137

Le capital au 30 juin est $10000(1+rt)$ avec la fraction d'année donnée dans le tableau suivant

nb_a/nb_c	exact	365	360
exact	136/366	135/366	137/366=0.3715847
365	136/365	135/365	137/365=0.3726027
360	136/360	135/360	137/360=0.375

Généralement, on utilise une convention exact/360 ou une convention identique pour le numérateur et le dénominateur. Le calcul de durée fait intervenir au numérateur le nombre exact de jours, même si l'année commerciale sert de référence. Un taux de court terme sur un an est donc majoré : 365[366]/360 = 1,0139[1,0167].

2.5 Principe d'équivalence des taux

Définition 2.5.1 (Taux équivalents)**.** *Deux taux sont équivalents si, pour un placement initial identique, ils permettent d'obtenir la même valeur finale.*

Définition 2.5.2 (Taux périodique)**.** *Le taux périodique est le taux correspondant à la période de capitalisation. Par exemple 2% périodique trimestriel, cela correspond à un taux annuel pour des intérêts composés* $(1 + 2\%)^4 - 1 = 0.8243216\%$ *et 8% pour des intérêts simples.*

Exemple 2.5.3. *Considérons trois placements pour un montant 1000 euros :*

— *Placement 1 : taux nominal 7% pour une durée de placement de 3 ans avec intérêts déposé sur un compte joint non capitalisé.*

— *Placement 2 : taux périodique semestriel 3% pour une durée de placement de 3 ans avec intérêts capitalisés semestriellement.*

— *Placement 3 : taux périodique sur une quinzaine 0.27% pour une durée de placement de 3 ans avec intérêts calculés par quinzaine et capitalisés en fin d'année.*

Posons V_0 *et* V_f *la valeur finale. On obtient les valeurs terminales suivantes*

— *Placement 1 :* $i = 7\%$, $T = 1$, $i_p = i/T = 7\%$ *et* $V_f = V_0(1 + i_p * 3) = 1210$.

— *Placement 2 :* $i_p = 3\%$, $T = 2$ *et* $V_f = V_0(1 + i_p)^{3\times T} = 1194.052$

— *Placement 3 :* $i_p = i/T = 0.27\%$, $T = 24$ *et* $V_f = V_0(1 + i_p * T)^3 = 1207.95$

Le taux équivalent annuel pour chacun des placements se calcule en ramenant tous les taux sur 1 an. On trouve

$$i_{eq1} = 7\%, i_{eq2} = (1 + 3\%)^2 - 1 = 6.09\%, i_{eq3} = 24 \times 0.27 = 6.48\%.$$

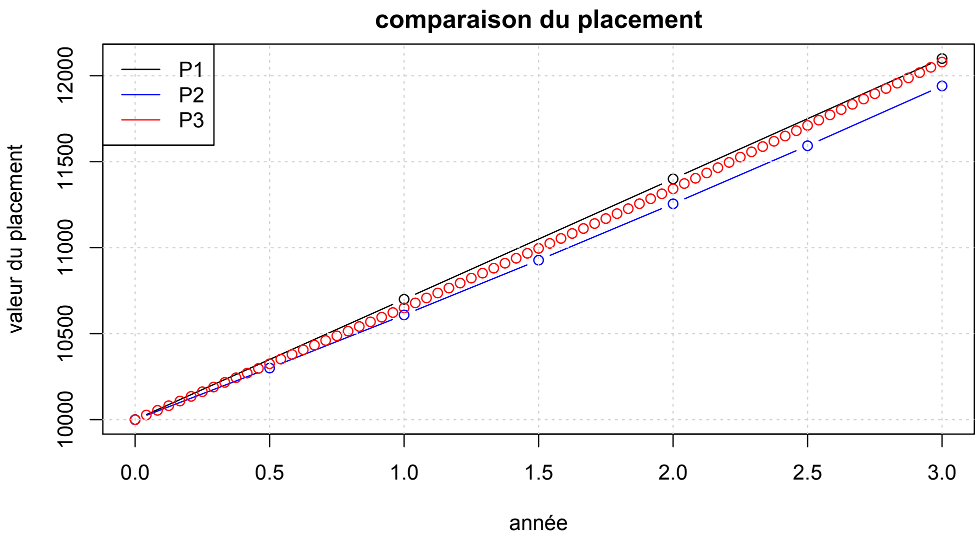
On retrouve le même ordre sur les taux que sur la valeur finale : c'est parfaitement logique.

Considérons un taux r et un investissement V_0. La valeur au temps t de l'investissement est

$$V_t = V_0(1 + rt); \tilde{V}_t = V_0(1 + r)^t,$$

où r est l 'intérêt. On peut ordonner les valeurs terminales de la manière suivante

$$\begin{cases} V_0(1 + rt) > V_0(1 + r)^t \text{ si } t < 1 \\ V_0(1 + rt) = V_0(1 + r)^t \text{ si } t = 1 \\ V_0(1 + rt) < V_0(1 + r)^t \text{ si } t > 1 \end{cases}$$


comparaison du placement
P1
P2
P3
valeur du placement
10000
10500
11000
11500
12000
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
2.5
3.0
année

Chapitre 3

Capitalisation et actualisation

3.1 Vocabulaire

Définition 3.1.1 (Capitalisation). *La capitalisation indique la fréquence avec laquelle l'intérêt s'ajoute au capital. Suivant la fréquence, on parle de capitalisation annuelle, mensuelle, etc... La capitalisation permet de calculer des valeurs futures à partir de valeurs présentes (ou actuelles).*

Définition 3.1.2 (Valeur future). *La valeur future correspond au montant acquis au terme d'un placement d'une série de flux effectués à des dates différentes.*

Définition 3.1.3 (Actualisation). *A l'inverse de la capitalisation, on peut vouloir déterminer quelle somme doit être prêtée aujourd'hui pour obtenir un montant fixé à l'avance : c'est le principe de l'actualisation.*

Définition 3.1.4 (Annuités). *Une suite d'annuité est une suite de règlements réalisés à intervalles de temps égaux. Le terme d'annuités bien que parfois utilisé quelle que soit la périodicité des versements, est habituellement réservé à des périodicités annuelles. On parle sinon de semestrialités, mensualités, etc.*

Cette suite d'annuité correspond à une rente pour celui qui la reçoit. On dit que la rente est temporaire, lorsqu'elle se compose d'un nombre fini d'annuités, perpétuelle sinon. La rente est à terme échu si le premier versement intervient une période après l'origine. C'est le cas habituel. Elle est immédiate sinon.

Un emprunt remboursé sur 10 ans par des mensualités constantes ; La constitution d'un capital par des versements réguliers ; L'acquisition d'une obligation d'une durée de vie de 6 ans qui verse des coupons annuels.

3.2 Capitalisation et actualisation à intérêts simples

Règle de calcul 3.2.1 (Capitalisation)**.** *Par exemple sur n périodes avec un taux proportionnel i_p. Si le flux est unique, alors la valeur capitalisée en $t = n$ est simplement*

$$V_n = F(1 + ni_p).$$

Si les flux sont $F_1, F_2, \ldots$ aux dates 1, 2, etc, alors la valeur capitalisée en $t = n$ est

$$V_n = \sum_{t=1}^{n} F_t(1 + (n - t)i_p).$$

Dans le cas où $F_1 = F_2 = \cdots = F_n = F$, alors

$$V_n = F \sum_{t=1}^{n}(1 + (n - t)i_p) = F \times \left(n + \frac{n(n-1)}{2} i_p\right).$$

Règle de calcul 3.2.2 (Actualisation)**.** *Par exemple sur n périodes avec un taux proportionnel i_p. Si le flux est unique, alors la valeur capitalisée en $t = 0$ est simplement*

$$V_0 = F_n/(1 + ni_p).$$

Si les flux sont $F_1, F_2, \ldots$ aux dates 1, 2, etc, alors la valeur capitalisée en $t = n$ est

$$V_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{1 + ti_p}.$$

Dans le cas où $F_1 = F_2 = \cdots = F_n = F$, alors

$$V_n = F \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{1 + ti_p}$$

Exemple 3.2.1. *Quelle somme doit-on placer aujourd'hui au taux de 12% pour obtenir dans trois ans 100000€ ? On a $V_0 = 100000/(1 + 3 \times 12/100) = 73529.41$.*

3.3 Capitalisation et actualisation à intérêts composés

Règle de calcul 3.3.1 (Capitalisation)**.** *Par exemple sur n périodes avec un taux proportionnel i_p. Si le flux est unique, alors la valeur capitalisée en $t = n$ est simplement*

$$V_n = F(1 + i_p)^n.$$

Si les flux sont $F_1, F_2, \ldots$ aux dates 1, 2, etc, alors la valeur capitalisée en $t = n$ est

$$V_n = \sum_{t=1}^{n} F_t(1 + i_p)^{n-t}.$$

Dans le cas où $F_1 = F_2 = \cdots = F_n = F$, alors

$$V_n = F \sum_{t=1}^{n}(1 + i_p)^{n-t} = F \times \frac{(1 + i_p)^n - 1}{i_p}.$$

Règle de calcul 3.3.2 (Actualisation)**.** *Par exemple sur n périodes avec un taux proportionnel i_p. Si le flux est unique, alors la valeur capitalisée en $t = n$ est simplement*

$$V_0 = \frac{F}{(1+i_p)^n}.$$

Si les flux sont $F_1, F_2, \dots$ aux dates 1, 2, etc, alors la valeur capitalisée en $t = n$ est

$$V_0 = \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+i_p)^t}.$$

Dans le cas où $F_1 = F_2 = \cdots = F_n = F$, alors

$$V_0 = F \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+i_p)^t} = F \times \frac{1-(1+i_p)^{-n}}{i_p}.$$

Par construction, on a $V_0 = \frac{V_n}{(1+i_p)^n}$.

On parlera de Valeur Actuelle Nette (VAN) en présence d'un flux négatif à l'origine de la suite, en date 0, i.e.

$$V_0 = F_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+i_p)^t}.$$

Exemple 3.3.1. *Quelle somme doit-on placer aujourd'hui au taux de 12% pour obtenir dans trois ans 100 000 € ? il faut placer* $100000/1.12^3 = 71178.02$.

Exemple 3.3.2. *Une banque accorde à une entreprise un prêt de 1000000e au taux de 10% remboursable en 8 ans. Le remboursement se fait par annuités constantes. Calculer le montant de cette annuité.*

La relation de base est fondée sur une égalité entre ce que la banque prête à la fin de l'année 0 et ce qu'elle reçoit en remboursement de la fin de la première année à la fin de la dernière année. Si on appelle A l'annuité constante, on a :

$$100000 = V_0 \Leftrightarrow 100000 = A \sum_{t=1}^{8} \frac{1}{(1+0.1)^t} \Leftrightarrow A = \frac{100000}{(1-1.1^{-8})/0.1} \Leftrightarrow A = 18744.4.$$

3.4 Choix d'investissement

3.4.1 Choix basé sur le taux actuariel

Définition 3.4.1 (Taux d'actualisation)**.** *On appelle taux d'actualisation, le taux d'intérêt utilisé pour calculer une valeur actuelle.*

Définition 3.4.2 (Taux actuariel)**.** *Le taux actuariel est le taux d'actualisation qui annule la valeur actuelle de l'ensemble des flux présents et futurs. Pour une actuelle $V_0(r)$ des flux futurs au taux r, le taux actuariel r_a vérifie $V_0(r_a) = 0$, c'est à dire*

$$F_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{F_t}{(1+r_a)^t} = 0.$$

Le taux actuariel est aussi souvent appelé internal rate of return *dans le milieu anglosaxon ou taux de rendement interne (TRI) en français.*

Exemple 3.4.3 (Placement)**.** *Considérons le placement de Mme Dupont. Elle place aujourd'hui pour une durée de 3 ans un montant de 1000€. Elle paie dès aujourd'hui 5€ de frais dossiers et recevra dans le futur des intérêts de 70 euros. Enfin elle récupérera son capital initial. Les flux sont donc*

$$F_0 = -1000 - 5 = -1005, F_1 = F_2 = 70, F_3 = 70 + 1000 = 1070.$$

On cherche le taux r_a tel que

$$1005 = \frac{70}{1+r_a} + \frac{70}{(1+r_a)^2} + \frac{1070}{(1+r_a)^3}.$$

On trouve $r_a = 6.809255\%$.

Proposition 3.4.1 (Existence du taux actuariel)**.** *Pour une série de flux $F_0, F_1, \dots, F_n$ (non-nuls) aux dates $t = 0, 1, \dots, n$, le taux existe et est unique si les flux $F_1, \dots, F_n$ sont tous de même signe et F_0 de signe différent tels que $\text{sign}(F_0 + \dots + F_n) = -\text{sign}(F_0)$. En pratique, le taux peut est calculé par la fonction* `uniroot` *de R ou* `TRI` *de Excel.*

Démonstration. On pose

$$f(x) = \sum_{t=0}^{n} F_t(1+x)^{-t}, x \in \mathbb{R}_+.$$

Par hypothèse, $f(0) = \sum_t F_t$ est de signe différent de $\lim_{x\to\infty} f(x) = F_0$. La continuité de f et le théorème des valeurs intermédiaires garantissent l'existence d'une solution sur $\mathbb{R}_+$. De plus, on a

$$f'(x) = -\sum_{t=1}^{n} F_t t(1+x)^{-t-1}, f''(x) = \sum_{t=1}^{n} F_t t(t+1)(1+x)^{-t-2}.$$

Donc $\text{sign}(f'(x)) = -\text{sign}(F_1)$ et $\text{sign}(f''(x)) = \text{sign}(F_1)$. Ainsi si $F_1, \dots, F_n \le 0$, alors f est strictement concave croissante. sinon $F_1, \dots, F_n \ge 0$, alors f est strictement convexe décroissante. La concavité ou la convexité garantit la recherche rapide d'une solution par dichotomie. □

Proposition 3.4.2 (Calcul approché du taux actuariel)**.** *Pour une série de flux $F_0, F_1, \dots, F_n$ (non-nuls) aux dates $t = 0, 1, \dots, n$, le taux peut être calculé par la fonction* `uniroot` *de R ou* `TRI` *de Excel. Un calcul approché est aussi possible :*

1. *trouver deux valeurs $r_1 < r_2$ (assez proche) tel que*

   $$V_0(r_1) < 0 < V_0(r_2) \text{ ou } V_0(r_1) > 0 > V_0(r_2).$$

   où $V_0(r) = \sum_{t=0}^{n} F_t(1+r)^{-t}$.
2. *par la méthode de la sécante, on obtient*

   $$r_3 = r_2 - \frac{r_2 - r_1}{V(r_2) - V(r_1)} V(r_2).$$

3. *on réitère le procédé éventuellement si r_3 est trop différent de r_1 et r_2.*

Cas particulier lorsque $F_1 = F_2 = \dots = F_n$:

$$V_0(r) = F_0 + F\sum_{t=1}^{n}(1+r)^{-t} = F_0 + F\frac{1-(1+r)^{-n}}{1-(1+r)^{-1}}(1+r)^{-1} = F_0 + F\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}.$$

Exemple 3.4.4 (Placement). *Reprenons le placement de Mme Dupont. On cherche le taux r_a tel que*

$$V_0(r) = \frac{70}{1+r} + \frac{70}{(1+r)^2} + \frac{1070}{(1+r)^3} - 1005.$$

Essayons $r = 6\%, 7\%, 8\%$.

$$V_0(6/100) = 21.73012,\ V_0(7/100) = -5,\ V_0(8/100) = -30.77097.$$

On choisit $r_1 = 6\%$ et $r_2 = 7\%$. On trouve $r_3 = 6.812945\%$.

Exemple 3.4.5 (Emprunt). *M. Dumoulin emprunte 1000€ aujourd'hui pour 4 ans. Le remboursement se fera par annuité constantes. Il doit par ailleurs souscrire à une assurance coutant 5.5€ chaque année et les frais de dossier (payable immédiatement) s'élèvent à 10€. L'échancier de flux est le suivant*

$$F_0 = 1000 - 10, F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = -(315.5 + 5.5) = -321.$$

Le cout de cet emprunt est le taux actuariel r_a tel que

$$1000 = 10 + \frac{321}{1+r_a} + \frac{321}{(1+r_a)^2} + \frac{321}{(1+r_a)^3} + \frac{321}{(1+r_a)^4}$$

Le TRI théorique est $r_a = 11.27821\%$. Essayons $r = 9\%, 10\%, 11\%, 12\%$.

$$V_0(9/100) = 49.95008,\ V_0(10/100) = 27.52681,\ V_0(11/100) = 5.885066,\ V_0(12/100) = -15.010860.$$

On choisit $r_1 = 11\%$ et $r_2 = 12\%$. On trouve $r_3 = 11.28164\%$.

3.4.2 Décision à partir du taux actuariel ou de la valeur actuelle nette

Définition 3.4.6 (Valeur actuelle nette). *La valeur actuelle nette d'un projet économique est la somme actualisée des flux futurs $(F_i)_{i\geq 1}$ et de l'investissement initial F_0*

$$VAN(r_c) = \sum_{t=0}^{n} F_i(1+r_c)^t,$$

pour un taux r_c de capital.

On rappelle que le taux actuariel (ou TRI) annule cette valeur. Un projet est dit rentable si $VAN > 0$ (équivalent à $TRI > r_c$) car il va générer de la richesse au vue des hypothèses ; il est généralement abandonné si $VAN \leq 0$.

Exemple 3.4.7. *Un investissement initial est de $400K$€. Les flux de trésoreries sont donnés $F_0 = -400$, $F_1 = 170$, $F_2 = 140$, $F_3 = 130$ et $F_4 = 120$. Le taux de capital ou d'actualisation retenu est de 10%. La VAN vaut $49.88K$€. La VAN est positive, donc sur cet seul élément, le projet est accepté. Mais, si le taux augmente, la VAN peut devenir négative. Par exemple, si on considère un taux de 20% la VAN tombe à $-28K$€, ce qui entraîne un rejet du projet. Par ailleurs, le TRI est de 16.02%.*

Exemple 3.4.8 (Conflits entre les critères). *Un second projet est évalué du même investissement. Les flux de trésoreries sont donnés $G_0 = -400$, $G_1 = 30$, $G_2 = 80$, $G_3 = 180$ et $G_4 = 140$. On a*

$$VAN_F = 49.88K, TRI_F = 16.02\%, VAN_G = 60.8K, TRI_G = 14.94\%.$$

Ainsi, le critère VAN tend à privilégier G et le TRI favorise F. On constate que la différence se situe sur le nombre d'années nécessaires pour générer des bénéfices.

Chapitre 4

Emprunts individuels

4.1 Définition

Définition 4.1.1 (Emprunt individuel)**.** *Ce sont des emprunts non divisibles et contractés auprès d'un seul créancier. Ils s'opposent donc aux obligations où le nombre de créanciers est grand. Pour chacun de ces emprunts, les clauses du contrat entre prêteur (créancier) et emprunteur (débiteur) précisent, entre autres, la durée de mise à disposition des fonds, le taux d'intérêt, les conditions de remboursement du capital emprunté.*

En général, il s'agit d'emprunt effectué par des particuliers auprès des banques (bien de consommation, appartement, automobile) ou par des entreprises à la recherche de financement pour des investissements.

Il existe 3 principaux modes de remboursement :

- In fine : l'emprunteur rembourse les intérêts à la fin de chaque annuité, et le capital à la fin de la dernière annuité.
- Amortissement constant : l'emprunteur rembourse une part constante du capital à chaque annuité plus les intérêts. Ceux-ci diminuent donc d'une annuité à l'autre.
- Annuité constante : le capital et les intérêts sont remboursés de façon à ce que les annuités (ou autre périodicité : mensualités, trimestrialités, ...) soient constantes.

4.2 Règle de calcul

4.2.1 Relations fondamentales

On note

- V_0 : le capital emprunté
- n : la durée de l'emprunt

— r : le taux d'intérêt périodique (= taux nominal annuel si les périodes sont des annuités)
— I_k : le montant des intérêts remboursé à la fin de la période k
— D_k : la part de capital (on parle d'amortissement) remboursé durant la période k
— A_k : le montant des versements périodiques (annuités si la période est l'année)
— V_k : le capital restant dû en fin de période k

Proposition 4.2.1. *On dispose des relations suivantes*

— *les annuités sont la somme des intérêts et du capital versé.*

$$A_k = D_k + I_k.$$

— *les intérêts pour la période k sont dus par rapport au reste de capital à rembourser :*

$$I_k = rV_{k-1}.$$

— *le capital du en fin de période k est celui du en fin de période $k-1$ moins l'amortissement en période k :*

$$V_k = V_{k-1} - D_k.$$

De plus, le capital est complètement remboursé à la fin du prêt $V_n = 0$.

— *le montant du prêt est la somme des amortissements*

$$V_0 = D_1 + D_2 + \cdots + D_n.$$

— *le montant du capital restant est la valeur actualisée des traites restant dues après la fin de la période k :*

$$V_k = A_{k+1}/(1+r) + \cdots + A_n/(1+r)^{n-k}.$$

Les remboursements différents se basent sur la propriété suivante

Règle de calcul 4.2.2 (In fine)**.** *Si $\forall k \leq n-1, A_k = rV_0$, $A_n = (1+r)V_0$ et $D_n = V_0$, alors on en déduit pour $1 \leq k < n$,*

$$D_k = 0, V_k = V_0, I_k = rV_0.$$

Règle de calcul 4.2.3 (Amortissement constant)**.** *Si $\forall k \leq n, D_k = V_0/n$, alors on en déduit pour $1 \leq k \leq n$,*

$$V_k = V_0 - \sum_{t=1}^{k} D_k = V_0 - \sum_{t=1}^{k} V_0/n = V_0(1 - k/n).$$

Par $I_k = rV_{k-1}$, on trouve

$$I_k = rV_0 \left(1 - \frac{k-1}{n}\right).$$

Par $A_k = I_k + D_k$, on trouve

$$A_k = rV_0 \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + V_0/n = V_0/n \left(1 + r(n-k+1)\right).$$

Règle de calcul 4.2.4 (Annuité constante)**.** *Si* $\forall k \leq n, A_k = A$*, alors du fait que le capital* V_0 *est la somme actualisée des flux futurs, on a*

$$A = V_0 \left(\sum_{k=1}^{n} (1+r)^{-k} \right)^{-1} = V_0 \left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{1-(1+r)^{-1}} (1+r)^{-1} \right)^{-1} = rV_0/(1-(1+r)^{-n}).$$

A partir de la relation d'actualisation $V_k = A_{k+1}/(1+r) + \cdots + A_n/(1+r)^{n-k}$*, on a*

$$V_k = A \sum_{k=1}^{n} (1+r)^{-k} = A \frac{1-(1+r)^{-(n-k)}}{1-(1+r)^{-1}} (1+r)^{-1} = V_0 \frac{1-(1+r)^{-(n-k)}}{1-(1+r)^{-n}}.$$

Par $I_k = rV_{k-1}$*, on trouve*

$$I_k = rV_0 \frac{1-(1+r)^{-(n-k+1)}}{1-(1+r)^{-n}}.$$

Par $D_k = V_{k-1} - V_k$*, on a*

$$D_k = \frac{rV_0}{(1+r)^{n-k+1}(1-(1+r)^{-n})}.$$

Au final, les coûts des prêts $C = \sum_k I_k$ sont

- In fine : $C = nrV_0$.
- Amortissement constant : $C = r\frac{n+1}{2}V_0$.
- Annuité constante : $C = V_0(\frac{nr}{1-(1+r)^{-n}} - 1)$.

Voir les tableaux 4.6, 4.2, 4.3 pour le détail au cours du temps.

4.2.2 Tableaux de flux

k	V_k	I_k	D_k	A_k
1	V_0	rV_0	0	rV_0
2	V_0	rV_0	0	rV_0
...				
$n-1$	V_0	rV_0	0	rV_0
n	0	rV_0	V_0	$(1+r)V_0$

TABLE 4.1 – Remboursement in fine

k	V_k	I_k	D_k	A_k
1	$V_0(1-\frac{1}{n})$	rV_0	V_0/n	$V_0\frac{1+nr}{n}$
2	$V_0(1-\frac{2}{n})$	$rV_0(1-\frac{1}{n})$	V_0/n	$V_0\frac{1+(n-1)r}{n}$
...				
$n-1$	$V_0(1-\frac{n-1}{n})$	$rV_0(1-\frac{n-2}{n})$	V_0/n	$V_0\frac{1+2r}{n}$
n	0	$rV_0(1-\frac{n-1}{n})$	V_0/n	$V_0\frac{1+r}{n}$

TABLE 4.2 – Amortissement constant

k	V_k	I_k	D_k	A_k
1	$V_0 \frac{1-(1+r)^{-(n-1)}}{1-(1+r)^{-n}}$	rV_0	$\frac{rV_0}{(1+r)^n-1}$	$V_0 \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$
2	$V_0 \frac{1-(1+r)^{-(n-2)}}{1-(1+r)^{-n}}$	$rV_0 \frac{1-(1+r)^{-(n-1)}}{1-(1+r)^{-n}}$	$\frac{rV_0}{(1+r)^{n-1}(1-(1+r)^{-n})}$	$V_0 \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$
...				
$n-1$	$V_0 \frac{1-(1+r)^{-1}}{1-(1+r)^{-n}}$	$rV_0 \frac{1-(1+r)^{-2}}{1-(1+r)^{-n}}$	$\frac{rV_0}{(1+r)^2(1-(1+r)^{-n})}$	$V_0 \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$
n	0	$rV_0 \frac{1-(1+r)^{-1}}{1-(1+r)^{-n}}$	$\frac{rV_0}{(1+r)(1-(1+r)^{-n})}$	$V_0 \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$

Table 4.3 – Annuité constante

4.2.3 Exemple simple

Considérons un emprunt de 150000€ à un taux d'intérêt de 4% pour une durée de 5 ans.

k	V_k	I_k	D_k	A_k
1	150000	6000	0	6000
2	150000	6000	0	6000
3	150000	6000	0	6000
4	150000	6000	0	6000
5	0	6000	150000	156000

Table 4.4 – Remboursement in fine

k	V_k	I_k	D_k	A_k
1	120000	6000	30000	36000
2	90000	4800	30000	34800
3	60000	3600	30000	33600
4	30000	2400	30000	32400
5	0	1200	30000	31200

Table 4.5 – Amortissement constant

k	V_k	I_k	D_k	A_k
1	122306	6000	27694	33694
2	93504	4892	28802	33694
3	63550	3740	29954	33694
4	32398	2542	31152	33694
5	0	1296	32398	33694

Table 4.6 – Annuité constante

Chapitre 5

Emprunts obligataires

Un emprunt obligataire se différencie d'un emprunt indivis par la présence de plusieurs prêteurs. Tout au long de cette partie, nous détaillerons en italique les caractéristiques d'un emprunt obligataire de BNP Paribas à titre d'exemple.

5.1 Caractéristiques d'un emprunt obligataire

L'emprunt obligataire est un emprunt qui fait appel à de nombreux prêteurs (appelés obligataires ou souscripteurs), qui reçoivent, en échange des sommes prêtées, des titres (appelés obligations). Chaque titre est donc représentatif d'une quote-part d'emprunt et fait l'objet d'une cotation en bourse. L'émission de tels emprunts est évidement réservé aux plus grandes des sociétés et permet de réunir des fonds importants.

Définition 5.1.1 (Obligation)**.** *Une obligation est un titre de créance négociable représentant une fraction d'un emprunt à long terme émis par une collectivité (état, organisme public ou privé) et donnant à son possesseur le droit de percevoir un intérêt le plus souvent annuel (appelé coupon) et d'être remboursé de son titre à l'échéance.*

Définition 5.1.2 (zéro-coupon)**.** *Une obligation qui ne verse pas de coupon est appelée zéro-coupon. Seul le nominal est reversé à échéance. Typiquement, les obligations à court terme (moins d'un an) sont des zéro- coupon.*

Toute émission d'un emprunt obligataire fait l'objet d'une note d'information portant le visa de la Commission des Opérations de Bourse (COB) et publiée au Bulletin des Annonces Légales Obligatoires. Une émission fait l'objet d'une note d'information comportant entre les principales informations :

1. la valeur nominale N des obligations : C'est la valeur qui sert de base au calcul des intérêts.
2. le taux nominal d'intérêt z : il sert à désigner l'emprunt et à calculer le montant du coupon. Il peut être fixe ou variable.
3. Le coupon c (intérêt) est calculé en appliquant le taux d'intérêt nominal à la valeur nominale : $c = Nz$.

4. le prix d'émission E : c'est la somme effectivement prêtée par l'obligataire. L'obligation peut-être émise au pair ($E = N$), au-dessous ($E < N$) ou au-dessus du pair ($E > N$).
5. la durée n de l'emprunt correspond au délai entre la date d'émission et la date de remboursement.
6. le prix de remboursement des obligations R : c'est la somme payée versée par l'emprunteur lors du remboursement de l'obligation. Les obligations sont amorties par remboursement : soit au pair ($R = N$), soit au-dessus du pair ($R > N$).
7. le système d'amortissement.
8. le taux de rendement actuariel brut au jour du règlement. Notons les $A_1, ..., A_n$ les annuités de l'obligation. Le taux actuariel est le taux y vérifiant

$$E = \sum_{t=1}^{n} \frac{A_t}{(1+y)^t}$$

   Si $E = R = N$, alors $y = z$.
9. le taux intrinsèque est $r = c/N = zN/R$. Si $N = R$, c'est donc z.

Le contrat d'émission fait aussi mention de

— la date de règlement des souscriptions : c'est le moment de départ de l'obligation.

— la date de jouissance est la date à partir de laquelle le titre porte intérêt. Dans la plupart des cas, elle identique à la date de règlement.

— la maturité ou durée de vie résiduelle est la moyenne pondérée des différentes durées de vie possibles.

— dans de rares cas, le droit au coupon et le droit au nominal sont dissociés : l'usufruit correspond à disposer seulement des coupons et la nue-propriété à disposer seulement du capital.

Les types d'emprunt obligataires sont nombreux et classés selon :

— le type d'émetteur
  1. emprunt d'état : bon du trésor ou obligation souveraine si émise dans une autre devise.
  2. entreprise : obligation d'entreprise (corporate bond), bons de caisse, bons d'assurance

— l'échéance
  1. $n \geq 5$ obligation pour échéance supérieure à 5 ans,
  2. $n < 5$ bons ou billets pour échéance inférieure à 5 ans.

— le mode de remboursement
  1. in fine (majorité des emprunts obligataires),
  2. zéro coupon,
  3. annuités constants,
  4. amortissement constant.

— le remboursement du nominal
  1. remboursement classique en unité monétaire,
  2. remboursement en action, obligation convertible.

— le taux de coupon
  1. obligation à taux fixe

2. obligation à taux variable : le taux est alors déterminé à partir d'un taux de référence monétaire
   — TME : taux moyen des emprunts à long terme de l'état,
   — TMM : taux de marché monétaire,
   — TAM : taux annuel monétaire,
   — TIOP : taux interbancaire offert à Paris.

Exemple 5.1.3. *Considérons une obligation BNP Paribas.*

1. *Valeur nominale* $N = 1000$€
2. *Taux nominal d'intérêt* $z = 4.25\%$

Le coupon est donc de

$$c = Nz = 42.5e.$$

On choisit un prix d'émission E de 101.291%, c'est à dire $1000 \times 101.291 = 1012.91$€.

3. *La durée de l'emprunt (n) : La date d'émission est le 27 juin 2003 et la date de remboursement le 27 juin 2015. La durée est donc de 12 ans.*
4. *La date de jouissance : La date de jouissance est le 27 juin 2003, soit la date de règlement ou d'émission.*
5. *Prix de remboursement (R) : le remboursement est effectué au pair donc* $R = 1000$€.

Pourquoi le prix d'émission n'est-il pas toujours égal à la valeur nominale ? Pour que le lancement d'un emprunt obligataire soit un succès, il faut réussir à concilier 2 objectifs opposés. En effet, l'emprunteur souhaite emprunter au taux le plus bas et le prêteur attend le rendement le plus élevé possible. L'équilibre entre ces 2 attitudes définit le niveau du marché, mesuré par un taux de rendement qui dépend de 2 variables : le taux d'intérêt et le prix d'émission.

Pour obtenir le taux de rendement le plus proche du marché, il faut :
— Soit offrir un taux d'intérêt nominal légèrement supérieur à celui du marché et augmenter le prix d'émission (qui est alors au-dessus du pair) ;
— Soit offrir un taux d'intérêt nominal plus faible à celui du marché et baisser le prix d'émission (qui est alors au-dessous du pair). Cette solution décourage l'investisseur et est peu adoptée.

5.2 Mode de remboursement

5.2.1 Obligations à termes fixes

L'obligation à terme fixe correspond à une obligation remboursement in fine, voir chapitre 4. Les flux sont donc

$$A_t = \begin{cases} c = Nz \text{ si } t = 1, \dots, n-1 \\ c + R \text{ si } t = n \end{cases}$$

Le prix d'émission se déduit comme

$$E = \sum_{t=1}^{n} \frac{c}{(1+y)^t} + \frac{R}{(1+y)^n} = c(1+y)^{-1}\frac{1-(1+y)^{-n}}{1-(1+y)^{-1}} + \frac{R}{(1+y)^n} = c\frac{1-(1+y)^{-n}}{y} + \frac{R}{(1+y)^n},$$

où y est le taux actuariel.

Exemple 5.2.1. *Considérons une obligation de caractéristiques* $N = 5000e$ *remboursée au pair et taux nominal* $z = 9\%$ *et d'échéance* $n = 10$ *ans. Les flux sont donnés dans le tableau suivant. La somme actualisée à 9% vaut E = 5000€ tandis que la somme actualisée à 8% vaut E = 5335€.*

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum_t F_t$
F_t	450	450	450	450	450	450	450	450	450	5450	
F_t actualisé à 9%	413	379	347	319	292	268	246	226	207	2302	5000
F_t actualisé à 8%	417	386	357	331	306	284	263	243	225	2524	5336

5.2.2 Obligations zéro coupon

Comme le nom l'indique, ce sont des obligations sans coupons. Le nominal et les intérêts sont payés à la date n. Les flux sont donc

$$A_t = \begin{cases} 0 \text{ si } t = 1, \dots, n-1 \\ R \text{ si } t = n \end{cases}$$

Les obligations zéro coupon ne sont jamais remboursés au pair pour tenir compte des intérêts $R > N$. Le prix d'émission est donc

$$E = \frac{R}{(1+y)^n},$$

où y est le taux actuariel.

Exemple 5.2.2. *Considérons une obligation de caractéristiques* $N = 5000e$ *remboursée à* $R = 6500e$ *et taux nominal* $z = 9\%$ *et d'échéance* $n = 10$ *ans. Les flux sont donnés dans le tableau suivant. Les flux actualisés terminaux correspondent aux valeurs d'émission.*

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum_t F_t$
F_t	0	0	0	0	0	0	0	0	0	6500	
F_t actualisé à 9%	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2746	2746
F_t actualisé à 8%	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3011	3011

5.2.3 Obligations à amortissement constant

Le capital est remboursé par tranche, i.e. $D_t = R/n$. Au début de l'année t, il y a $t-1$ fractions remboursés donc les intérêts en t sont $I_t = N(1 - \frac{t-1}{n})z$. Les flux sont donc

$$A_t = \frac{N}{n}(n-t+1)z + \frac{R}{n}$$

pour $t = 1, \dots, n$. Le prix d'émission est donc

$$E = \sum_{t=1}^{n} \frac{N}{n(1+y)^t}(n-t+1)z + \sum_{t=1}^{n} \frac{R}{n(1+y)^t} = \frac{Nz}{n} \sum_{t=1}^{n} \frac{n-t+1}{(1+y)^t} + \frac{R}{n}\frac{1-(1+y)^{-n}}{y}$$

où y est le taux actuariel.

Exemple 5.2.3. *Considérons une obligation de caractéristiques* $N = 5000$€ *remboursée au pair et taux nominal* $z = 9\%$ *et d'échéance* $n = 10$ *ans. Les flux sont donnés dans le tableau suivant. La somme actualisée à 9% vaut* $E = 5000$€ *tandis que la somme actualisée à 8% vaut* $E = 5335$€*.*

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\sum_t F_t$
F_t	950	905	860	815	770	725	680	635	590	545	
F_t actualisé à 9%	872	762	664	577	500	432	372	319	272	230	5000
F_t actualisé à 8%	880	776	683	599	524	457	397	343	295	252	5206

5.3 Valeur d'une obligation et prix de marché

5.3.1 Absence d'opportunité d'arbitrage

Définition 5.3.1 (Opportunité d'arbitrage)**.** *On dit qu'un marché présente une opportunité d'arbitrage (arbitrage opportunity ou free lunch) lorsque l'on peut mettre en oeuvre une stratégie d'achat et de vente de différents titres qui ne coûte rien et rapporte des gains strictement positifs (aujourd'hui ou à une date future).*

L'arbitrage est une notion essentielle en finance. On donne ici un aperçu afin de valoriser les obligations mais nous développerons cette notion ultérieurement.

Exemple 5.3.2. *Si sur un marché coexistaient au même prix de 99€ un zéro-coupon X à 6 mois de nominal 100€ et un autre zéro-coupon Y de nominal 110€ il est clair que l'on pourrait s'enrichir facilement en mettant en oeuvre la stratégie d'arbitrage suivante :*

— *Aujourd'hui : vendre de X et acheter de Y dont le coût est* $99 - 99 = 0$.
— *Dans 6 mois : payer le coupon de X et récupérer le coupon de Y pour faire un gain de* $-100 + 110 = 10$.

La plupart du temps, on fera l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage (en abrégé AOA) sur les marchés financiers. En tout état de cause, une opportunité d'arbitrage ne peut se présenter que sur un laps de temps extrêmement court : si nous supposons que Y et X coexistent au même prix, tous les acteur achèteraient Y de sorte que son prix monterait et vendraient X de sorte que son prix baisserait. Cette hypothèse va nous permettre d'entreprendre des raisonnements par arbitrage équivalents des raisonnements par l'absurde en mathématiques.

En fait les deux critères de la VAN et du TRI supposent que le taux annuel r est constant dans le temps, autrement dit que l'on pourra réinvestir la deuxième année les intérêts de la première année au même taux r. Cette anticipation sur les taux futurs est loin d'être évidente, et c'est en tout cas faire pari risqué sur l'avenir, puisque rien n'empêche la Banque Centrale de modifier ses taux sans crier garde. Ce risque est appelé risque de taux, et induit le plus souvent une préférence des investisseurs pour les taux courts (à moins d'un an qui leur permettent de réagir plus vite aux variations de taux).

Exemple 5.3.3. *Supposons que sur le marché obligataire américain existent deux obligations A et B de maturité ans, ainsi que deux zéro-coupons C et D de maturité un et deux ans respectivement. Le tableau suivant résume leurs caractéristiques :*

	Prix $t = 0$	*Flux* $t = 1$	*Flux* $t = 2$
A	*1000*	*100*	*1100*
B	*1735*	*1000*	*1000*
C	*95*	*100*	*0*
D	*80*	*0*	*100*

Dans cette situation, on peut répliquer l'obligation A en constituant un portefeuille A' contenant un zéro-coupon C et onze zéro-coupons D. Le prix à payer pour se constituer ce portefeuille est de : 1× 95 + 11× 80 = 975€ , soit 25€ de moins que l'obligation alors que les cash flows sont identiques.

	Quantité	*Prix* $t = 0$	*Flux* $t = 1$	*Flux* $t = 2$
C	*1*	*95*	*100*	*0*
D	*11*	*880*	*0*	*1100*
Total		*975*	*100*	*1100*

De même on montre que l'obligation B peut être répliquée par dix zéro-coupons C et dix zéro-coupons D. Le prix de ce portefeuille est de 1750€. Cette obligation est sous cotée de 15€. Dans ce marché il existe donc des opportunités d'arbitrage !

La présence des zéro-coupons sur le marché fournit donc un moyen simple de savoir si les obligations sont sous ou sur cotée, et ce indépendamment de la personnalité des investisseurs. Si l'on fait le raisonnement inverse, on dispose d'un moyen de valoriser les emprunts obligataires.

Définition 5.3.4 (Courbe des taux à terme)**.** *Considérons un zéro-coupon d'échéance t et de nominal N, de prix p_t sur le marché. le taux annuel de rentabilité du zéro-coupon est*

$$z(t) = (1 + r_t)^{1/t} - 1 = \left(\frac{N}{p_t}\right)^{1/t} - 1.$$

La courbe $(t, z(t))_t$ est appelée courbe des zéros-coupons par terme.

Remarque 5.3.1. *On distingue trois grands cas de figure :*

- *La courbe est plate, i.e. $z = z_0$ (où z_0 est une constante). Il s'agit en fait d'un cas d'école, qui revient à supposer qu'il existe un taux d'intérêt constant dans le temps, et qui ne se rencontre pas dans la pratique ;*
- *La courbe est croissante. C'est le cas le plus courant : plus l'échéance est éloignée, plus le risque de taux est important, donc plus le marché exige une rentabilité élevée ;*
- *La courbe est décroissante. On observe ce phénomène lorsque le marché anticipe une baisse des taux.*

Règle de calcul 5.3.2 (Prix de non-arbitrage)**.** *En l'absence d'opportunité d'arbitrage, le prix de marché P_{AOA} de tout titre financier versant une suite de n cash flows certains (F_t) aux échéances futures $t_1, t_2, \ldots, t_n$ doit être égal à la valeur actuelle du titre, en choisissant pour taux d'actualisation les taux zéro-coupons à échéances $t_1, t_2, \ldots, t_n$:*

$$P_{AOA} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{t_i}}{(1 + z(t_i))^{t_i}}.$$

Démonstration. La preuve de cette formule est à retenir car elle met en oeuvre un raisonnement par arbitrage. Pour simplifier, on suppose que $n = 3$, et que les flux sont annuels. On désigne par X, Y, Z les zéro-coupons à un, deux et trois ans respectivement, et par A le titre en question. On peut également supposer sans perte de généralité que X, Y et Z ont tous un nominal de 1. Le prix de Y, par exemple, est alors de $(1 + z(2))^{-2}$. Supposons que

$$P_{AOA} > \sum_{i=1}^{3} \frac{F_{t_i}}{(1 + z(t_i))^{t_i}}.$$

On peut alors mettre en oeuvre la stratégie suivante qui dégage un profit positif sans risque : une opportunité d'arbitrage.

Opération	Flux $t = 0$	Flux $t = 1$	Flux $t = 2$	Flux $t = 3$
Acheter F_1 titres X	$\frac{-F_1}{1+z(1)}$	F_1		
Acheter F_2 titres Y	$\frac{-F_2}{(1+z(1))^2}$		F_2	
Acheter F_3 titres Z	$\frac{-F_3}{(1+z(1))^3}$			F_3
Vendre A	P_{AOA}	$-F_1$	$-F_2$	$-F_3$
Total	> 0	0	0	0

Supposons que

$$P_{AOA} < \sum_{i=1}^{3} \frac{F_{t_i}}{(1 + z(t_i))^{t_i}}.$$

On applique la stratégie opposée (acheter et vendre F_i) pour dégager un profit positif sans risque. Ainsi par AOA, le prix de A est

$$P_{AOA} = \sum_{i=1}^{3} \frac{F_{t_i}}{(1 + z(t_i))^{t_i}}.$$

□

5.3.2 Prix de marché

Les obligations sont cotées en pourcentage de leur valeur nominale au pied du coupon (c'est à dire coupon couru non compris). Le coupon couru (montant des intérêts courus de la dernière échéance au jour de la cotation) est également exprimé en pourcentage de la valeur nominale et varie chaque jour de 1/365ème du coupon annuel. Pour déterminer le prix que paie l'acheteur d'une obligation en bourse, il faut ajouter au cours de l'obligation le montant du coupon couru.

Les prix de marché pour les différents types de remboursement dépendent du taux de marché à la date k. Considérons la cours de taux $z_1, \ldots, z_n$ à la date 0 pour les maturités $1, \ldots, n$.

1. Remboursement in fine : Le prix de marché P_k au temps k et le rendement z_k au temps k sont reliés par

$$P_k = \sum_{t=k+1}^{n} \frac{c}{(1 + z_t)^{t-k}} + \frac{R}{(1 + z_n)^{n-k}}.$$

2. Zéro-coupon : Le prix de marché P_k au temps k et le rendement i_k au temps k sont reliés par

$$P_k = \frac{R}{(1+z_n)^{n-k}}.$$

3. Amortissement constant : Le prix de marché P_k au temps k et le rendement i_k au temps k sont reliés par

$$P_k = \frac{Nz}{n} \sum_{t=k+1}^{n} \frac{n-t+1}{(1+z_t)^{t-k}} + \frac{R}{n} \sum_{t=k+1}^{n} \frac{1}{(1+z_t)^{t-k}}$$

De manière générale, l'obligation est cotée en pourcentage, c'est à dire P_k/N.

Chapitre 6

Les produits dérivés et les modèles d'évaluation par arbre

6.1 Présentation des dérivés

Les produits dérivés ne datent pas du XXème siècle. L'exemple historique est la hollande du XVIIème qui proposait un marché d'options sur la tulipe. En effet, un hiver rigoureux impliquait une récolte moyenne et une hausse des cours et inversement. Voulant se prémunir contre une baisse des cours et voulant stabiliser leurs revenus les producteurs ont cherché une solution financière. A l'inverse les négociants désireux de s'enrichir, proposèrent aux producteurs des options qui leur conféraient le droit de vendre leurs productions de bulbes à des prix prédéterminés. Cette expérience innovante n'allait cependant pas durer. Après un hiver particulièrement doux, le cours du bulbe s'effondra. Les producteurs usèrent massivement de leurs options, et les négociants ne purent pas faire face. Une analyse postérieure a montré que la faillite de ce marché s'explique par la sous-estimation de la prime de l'option.

Définition 6.1.1. *Un produit dérivé est un produit financier, qui s'achète et se vend, et qui est toujours bâti sur la base d'un autre produit financier. Ce dernier est appelé "sous-jacent" du produit dérivé. Ceux-ci peuvent être des actions, des obligations, des devises, des matières premières, des indices, des produits dérivés.*

L'utilisation des produits dérivés est réservée aux professionnels intervenant sur les marchés financiers. Par professionnels, on entend (i) Les opérateurs des banques et société de courtage (ii) Les trésoriers d'entreprise (iii) Les gestionnaires de fond de pension, SICAV... (iv) Les gestionnaires de collectivités locales dont le budget dépasse quelques millions d'euros.

	Nature du marché	
Type de négociation	Réglementés	De gré à gré (OTC)
Fermes : obligation d'acheter, vendre ou d'échanger	Futures	Forwards (FRA)
Conditionnels : droit d'acheter, vendre ou d'échanger	Options, Bons de souscriptions	Options sur actions, Caps, Floor

6.2 Descriptif des options

Définition 6.2.1 (Option)**.** *Une option est un contrat qui confère à son acheteur le droit et non l'obligation d'acheter ou de vendre jusqu'à une certaine date appelée date d'échéance T un actif sous jacent S, à un prix fixé dès la conclusion du contrat appelé prix d'exercice K, en contrepartie du versement immédiat d'une prime au vendeur P. On distingue*

- *option d'achat (call) : l'acheteur a le droit d'acheter tandis que le vendeur s'engage à vendre à la demande de l'acheteur.*
- *option de vente (put) : l'acheteur a le droit de vendre tandis que le vendeur s'engage à acheter à la demande de l'acheteur.*

Les options classiques (vanilla) sont de deux types :

- Européennes : l'acheteur ne peut exercer son droit qu'à l'échéance.
- Américaines : l'acheteur peut exercer son droit à tout moment entre la date de création de l'option et la date d'échéance. Option plus souple mais aussi plus coûteuse que l'option européenne.

Parallèlement aux options classiques, apparaissent depuis les années 90, sur les marchés de gré à gré, des options dites “ exotiques ” :

- Les options asiatiques, dont le prix d'exercice à l'échéance est fonction de la moyenne des cours du sous-jacent enregistrés durant la durée de vie de l'option.
- Les options lookbacks, dont le prix d'exercice à l'échéance est fonction du maximum ou du minimum des cours du sous-jacent enregistrés durant la durée de vie de l'option.
- Les options barrières qui peuvent être annulées si le cours franchit un certain seuil.
- Les options parisiennes qui peuvent être annulées ou activées si le cours reste dans une certaine zone plus d'un temps donné.
- Les options d'échange qui permettent d'échanger une action X contre une action Y à une date future

6.3 Pertes et profit des options vanilla

Notation

- K le prix d'exercice.
- S_t la valeur à la date t du sous-jacent S, e.g. S_0 la valeur en 0 et S_T la valeur en T.
- T la maturité de l'option.

Le flux terminal engendré par une option appelé payoff vaut

- Call : $\max(S_T - K, 0) = (S_T - K)_+$.
- Put : $\max(K - S_T, 0) = (K - S_T)_+$.

Une option d'achat est dite en dehors de la monnaie si son prix d'exercice $K > S_0$, dans la monnaie si $S_0 > K$ et à la monnaie si $S_0 = K$.

6.3.1 Option d'achat

Le résultat à échéance d'un call est détaillée dans la figure 6.1.

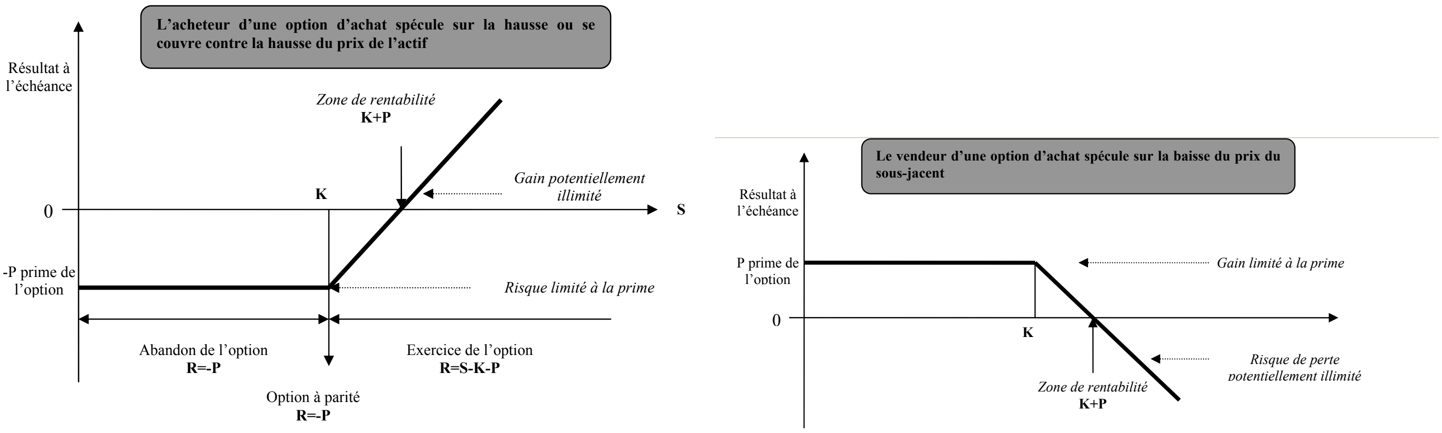


FIGURE 6.1 – Achat et vente d'un call

Exemple 6.3.1 (Spéculation sur la hausse). *Un spéculateur spécule sur la hausse d'une action.*

1. *Il achète une option d'achat au prix d'exercice de 100€ avec un cours du sous-jacent de 100€, moyennant une prime de 3€.*
   - *le spéculateur avait raison et le cours est de 130€ : son gain est de 130-100-3=27 et son rapport gain/investissement=27/3=900% !*
   - *le spéculateur avait tort et le cours est de 70€ : son gain (sa perte dans ce cas) est de -3 et son rapport gain/investissement=-100%*
2. *Il achète une action*
   - *il la revend à 130 et a gagné 30 : gain/investissement=30/100=30%*
   - *il la revend à 70 et a perdu 30 gain/investissement=-30/100=-30%*

A travers cet exemple on peut voir que les options permettent un effet de levier considérable.

Exemple 6.3.2 (Couverture contre une hausse). *Une entreprise souhaite acheter 10000 actions X dans 6 mois. Le cours de X est aujourd'hui de 52€.*

1. *Elle achète 10000 options d'achat au prix d'exercice de 52€ moyennant une prime de 2,5€ par option.*
   - *6 mois plus tard le cours est de 68€ : l'entreprise exerce ses options et achète 10000 actions au prix de 10000*52-2,5*10000=520000-25000=495000€*
   - *le cours est de 48€ : l'entreprise n'exerce pas ses options et achète les actions sur le marché pour 48*10000-2,5*10000=455000€*
2. *Elle attend et agit 6 mois plus tard sur le marché :*
   - *elle doit payer 680000€ soit une perte par rapport à l'option de 185000€*
   - *elle doit payer 480000€ soit un gain de 25000€.*

On voit que devant une incertitude, les options restent une stratégie plus prudente.

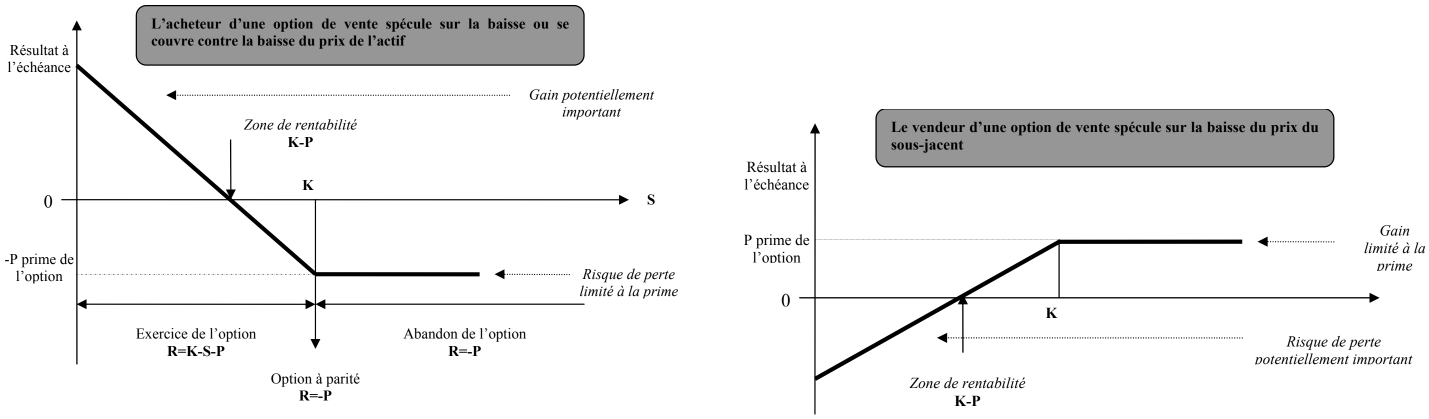


FIGURE 6.2 – Achat et vente d'un put

6.3.2 Option de vente

Exemple 6.3.3 (Couverture contre une baisse)**.** *Une entreprise souhaite vendre 10000 actions X dans 6 mois. Le cours de X est aujourd'hui de 50€.*

1. *Elle achète 10000 options de vente au prix d'exercice de 50€ moyennant une prime de 2,5€ par option.*
   — *6 mois plus tard le cours est de 40€ : l'entreprise exerce ses options et vend 10000 actions au prix de 10000*50-2,5*10000=500000-25000=475000€*
   — *le cours est de 60€ : l'entreprise n'exerce pas ses options et vend les actions sur le marché pour 60*10000-2,5*10000=575000€*
2. *Elle attend et agit 6 mois plus tard sur le marché :*
   — *elle reçoit 400000€ soit une perte par rapport à l'option de 75000€*
   — *elle reçoit 600000€ soit un gain de 25000€*

6.3.3 Stratégies complexes

Sauf indication contraire, les stratégies détaillées ci-dessous peuvent s'appliquer aussi bien aux options de change qu'aux options de taux.

— Straddle : achat d'un call et d'un put de prix d'exercice identiques.
— Strangle :achat d'un call et d'un put de prix d'exercice différents.
— Collar : achat d'un call et vente d'un put ou achat d'un put et vente d'un call.

6.4 Modèle d'évaluation par arbre

6.4.1 Modèle à une période

Considérons une économie sur une période entre $t = 0$ et $t = 1$ contenant deux actifs négociés : une obligation B sans risque de rendement r et un titre risqué S ayant une incertitude sur sa valeur en $t = 1$. L'hypothèse est faite qu'il y a seulement deux scénarios possibles pour le titre S :

— scénario haussier $S_1^u = S_0 u$ avec $1 < u$ avec une probabilité p.

— scénario baissier $S_1^d = S_0 d$ avec $d < 1$ avec une probabilité $1 - p$.

Par une méthode d'évaluation par arbre, nous allons évaluer le prix d'une option d'achat de prix d'exercice K et de maturité 1. Notons C_1^u (resp. C_1^d) la valeur du call en $t = 1$ pour le scénario haussier (resp. baissier). En $t = 1$, l'option vaut son payoff : $C_1^u = (S_1^u - K)_+$ et $C_1^d = (S_1^d - K)_+$. Le graphique 6.3 représente les flux dans les deux scénarios envisagés.

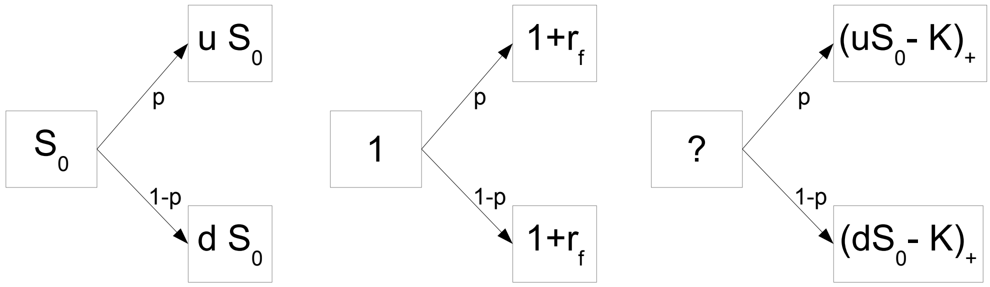


FIGURE 6.3 – Univers à deux états

Proposition 6.4.1. *Si on suppose l'absence d'opportunité d'arbitrage, alors on a*

$$d < 1 + r_f < u.$$

Démonstration. Si $1 + r_f < d$ alors on achète le sous-jacent en empruntant la même quantité : cela génère un flux positif en $t = 1$. Si $u < 1 + r_f$ alors on vent le sous-jacent en plaçant la même quantité : cela génère un flux positif en $t = 1$. □

Proposition 6.4.2 (Prix du call)**.** *Si on suppose l'absence d'opportunité d'arbitrage, l'absence de dividende et un prix d'exercice $S_1^d < K < S_1^u$, alors le prix du call est donné par*

$$C_0 = q \frac{C_1^u}{1 + r_f} + (1 - q) \frac{C_1^d}{1 + r_f},$$

où $q = (1 + r_f - d)/(u - d)$, $C_1^u = (S_0 u - K)_+$ et $C_1^d = (S_0 d - K)_+$.

Démonstration. On construit un portefeuille répliquant avec Δ quantité de sous-jacent et B quantité d'obligation. La valeur du portefeuille en t est $V_t = \Delta S_t + B(1 + r_f)^t$ où $t = 0, 1$. On le souhaite répliquant par conséquent $V_1^u = C_1^u$ et $V_1^d = C_1^d$. Le système est

$$\begin{cases} \Delta S_1^u + B(1 + r_f) = (S_1^u - K)_+ \\ \Delta S_1^d + B(1 + r_f) = (S_1^d - K)_+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta S_1^u + B(1 + r_f) = S_1^u - K \\ \Delta S_1^d + B(1 + r_f) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = \frac{S_1^u - K}{S_1^u - S_1^d} \\ B = \frac{S_1^u - K}{S_1^u - S_1^d} \frac{-S_1^d}{1 + r_f}. \end{cases}$$

Le prix en $t = 0$ est

$$V_0 = \Delta S_0 + B = \frac{u S_0 - K}{(u - d) S_0} S_0 - \frac{d S_0}{1 + r_f} \frac{u S_0 - K}{(u - d) S_0} = \frac{u S_0 (1 + r_f) - K(1 + r_f)}{(u - d)(1 + r_f)} - \frac{d u S_0 - d K}{(u - d)(1 + r_f)}$$

$$V_0 = \frac{(1 + r_f - d)(u S_0 - K)}{(u - d)(1 + r_f)}.$$

□

Le portefeuille répliquant implique une quantité positif du titre sous-jacent et négative de l'obligation (emprunt). Nulle part apparait la probabilité historique ou physique p dans les calculs d'évaluation.

Le prix est donc l'espérance sous une probabilité (appelée probabilité risque neutre ou probabilité martingale) du profit actualisée de l'option. Cette prime a été calculée par absence d'opportunités d'arbitrage en évaluant une stratégie répliquant ou couvrant l'option.

Proposition 6.4.3 (Prix du put)**.** *Si on suppose l'absence d'opportunité d'arbitrage, l'absence de dividende et un prix d'exercice $S_1^d < K < S_1^u$, alors le prix du put est donné par*

$$P_0 = q\frac{P_1^u}{1+r_f} + (1-q)\frac{P_1^d}{1+r_f},$$

où $q = (1 + r_f - d)/(u - d)$, $P_1^d = (K - S_0 d)_+$ et $P_1^u = (K - S_0 u)_+$.

Démonstration. On construit un portefeuille répliquant avec Δ quantité de sous-jacent et B quantité d'obligation. La valeur du portefeuille en t est $V_t = \Delta S_t + B(1+r_f)^t$ où $t = 0, 1$. On le souhaite répliquant par conséquent $V_1^u = P_1^u$ et $V_1^d = P_1^d$. Le système est

$$\begin{cases} \Delta S_1^u + B(1+r_f) = (K - S_1^u)_+ \\ \Delta S_1^d + B(1+r_f) = (K - S_1^d)_+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta S_1^u + B(1+r_f) = 0 \\ \Delta S_1^d + B(1+r_f) = K - S_1^d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = -B(1+r_f)/S_1^u \\ -BS_1^d/S_1^u + B = \frac{K-S_1^d}{1+r_f} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = -B(1+r_f)/S_1^u \\ B = \frac{K-S_1^d}{1+r_f}\frac{S_1^u}{S_1^u-S_1^d} \end{cases}$$

Donc

$$B = \frac{K - S_1^d}{1+r_f}\frac{S_1^u}{S_1^u - S_1^d}, \Delta = -\frac{K - S_1^d}{S_1^u - S_1^d},$$

$$V_0 = \Delta S_0 + B = -\frac{K - S_1^d}{S_1^u - S_1^d}S_0 + \frac{K - S_1^d}{1+r_f}\frac{S_1^u}{S_1^u - S_1^d} = \frac{K - dS_0}{1+r_f}\frac{u - 1 - r_f}{u - d}$$

□

Proposition 6.4.4 (Parité call/put)**.**

$$(1 + r_f)(C_0 + P_0) = K(1 - 2q) + S_0(uq - d(1 - q))$$

Démonstration. Immédiat. □

6.4.2 Modèle à deux périodes

Proposition 6.4.5 (Prix du call)**.** *Si on suppose l'absence d'opportunité d'arbitrage, l'absence de dividende, alors le prix du call est donné par*

$$C_0 = q^2\frac{C_2^{uu}}{(1+r_f)^2} + 2q(1-q)\frac{C_2^{ud}}{(1+r_f)^2} + (1-q)^2\frac{C_2^{dd}}{(1+r_f)^2},$$

où $q = (1 + r_f - d)/(u - d)$, $C_2^{xy} = (S_0 xy - K)_+$ pour $x, y \in \{u, d\}$.

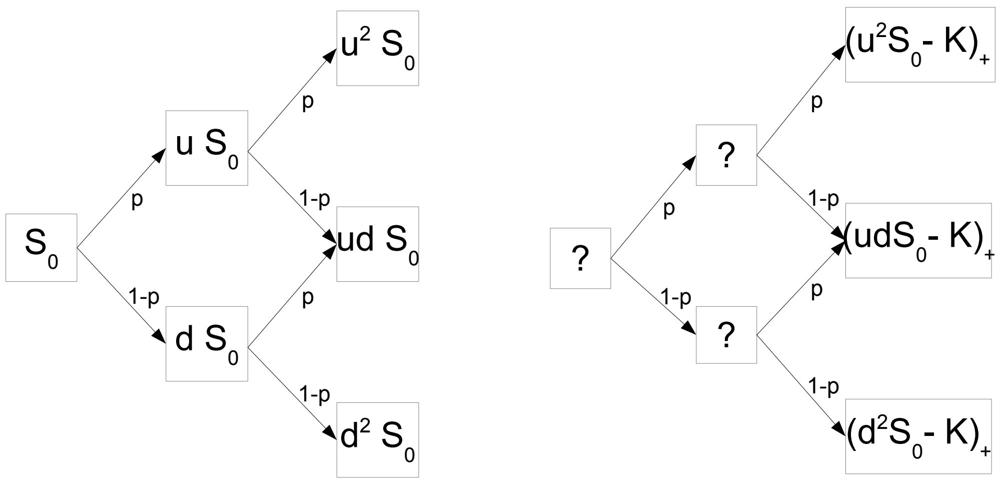


FIGURE 6.4 – Univers sur deux périodes

Démonstration. Première approche : récurrence rétrograde entre $t = 2$ et $t = 1$ puis entre $t = 1$ et $t = 0$ pour le call.

Posons $q = (1+r_f-d)/(u-d)$, $C_2^{uu} = (S_0u^2-K)_+$, $C_2^{ud} = (S_0ud-K)_+$ et $C_2^{dd} = (S_0d^2-K)_+$. Ainsi par la section précédente, on a

$$C_1^u = q\frac{C_2^{uu}}{1+r_f} + (1-q)\frac{C_2^{ud}}{1+r_f},$$

et

$$C_1^d = q\frac{C_2^{ud}}{1+r_f} + (1-q)\frac{C_2^{dd}}{1+r_f},$$

Puis, on obtient

$$C_0 = q\frac{C_1^u}{1+r_f} + (1-q)\frac{C_1^d}{1+r_f} = q^2\frac{C_2^{uu}}{(1+r_f)^2} + 2q(1-q)\frac{C_2^{ud}}{(1+r_f)^2} + (1-q)^2\frac{C_2^{dd}}{(1+r_f)^2}.$$

□

Proposition 6.4.6 (Prix du put)**.** *Si on suppose l'absence d'opportunité d'arbitrage, l'absence de dividende, alors le prix du call est donné par*

$$C_0 = q^2\frac{P_2^{uu}}{(1+r_f)^2} + 2q(1-q)\frac{P_2^{ud}}{(1+r_f)^2} + (1-q)^2\frac{P_2^{dd}}{(1+r_f)^2},$$

où $q = (1+r_f-d)/(u-d)$, $P_2^{xy} = (K-S_0xy)_+$ *pour* $x, y \in \{u, d\}$.

Démonstration. Seconde approche : portefeuille de réplication pour le put

On construit un portefeuille répliquant avec Δ quantité de sous-jacent et B quantité d'obligation. On note $P_2^{xy} = (K-S_2^{xy})_+$. Pour la partie haute, le système est

$$\begin{cases} \Delta S_2^{uu} + B(1+r_f) = P_2^{uu} \\ \Delta S_2^{ud} + B(1+r_f) = P_2^{ud} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta S_2^{uu} + B(1+r_f) = P_2^{uu} \\ \Delta(S_2^{ud} - S_2^{uu}) = P_2^{ud} - P_2^{uu} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = (P_2^{uu} - \Delta S_2^{uu})/(1+r_f) \\ \Delta = \frac{P_2^{uu}-P_2^{ud}}{S_2^{uu}-S_2^{ud}}, \end{cases}$$

Donc

$$P_1^u = \Delta S_1^u + B = \frac{P_2^{uu} - P_2^{ud}}{u-d} + \frac{P_2^{uu} - \frac{P_2^{uu}-P_2^{ud}}{u-d}u}{(1+r_f)} = \frac{P_2^{uu} - P_2^{ud}}{(u-d)(1+r_f)}(1+r_f-u) + \frac{P_2^{uu}}{1+r_f}$$

$$P_1^u = P_2^{uu}\frac{1+r_f-d}{(u-d)(1+r_f)} + P_2^{ud}\frac{u-1-r_f}{(u-d)(1+r_f)} = \frac{qP_2^{uu}}{(1+r_f)} + \frac{(1-q)P_2^{ud}}{(1+r_f)}.$$

De même pour la partie basse,

$$P_1^d = \frac{qP_2^{ud}}{(1+r_f)} + \frac{(1-q)P_2^{dd}}{(1+r_f)}.$$

Enfin, le système pour la première période est

$$\begin{cases} \Delta S_1^u + B(1+r_f) = C_1^u \\ \Delta S_1^d + B(1+r_f) = C_1^d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta S_1^u + B(1+r_f) = C_1^u \\ \Delta(S_1^d - S_1^u) = C_1^d - C_1^u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = \frac{C_1^d - C_1^u}{S_1^d - S_1^u} \\ B = \frac{C_1^u}{1+r_f} - \frac{\Delta S_1^u}{1+r_f} = \frac{C_1^u}{1+r_f} - \frac{u}{1+r_f}\frac{C_1^d - C_1^u}{d-u} \end{cases}$$

Ainsi la valeur en 0 est

$$\begin{aligned}
C_0 &= \Delta S_0 + B = \frac{C_1^d - C_1^u}{d-u} + \frac{C_1^u}{1+r_f} - \frac{u}{1+r_f}\frac{C_1^d - C_1^u}{d-u} \\
&= \frac{1}{1+r_f}\left(\frac{(C_1^d - C_1^u)(1+r_f)}{d-u} + \frac{C_1^u(d-u)}{d-u} - \frac{u(C_1^d - C_1^u)}{d-u}\right) \\
&= \frac{C_1^d(u-1-r_f) + C_1^u(1+r_f-d+u-u)}{(1+r_f)(u-d)} = \frac{C_1^u(1+r_f-d) + C_1^d(u-1-r_f)}{(1+r_f)(u-d)} \\
&= \frac{qC_1^u + (1-q)C_1^d}{1+r_f} = \frac{q\left(\frac{qP_2^{uu}}{(1+r_f)} + \frac{(1-q)P_2^{ud}}{(1+r_f)}\right)}{1+r_f} + \frac{(1-q)\left(\frac{qP_2^{ud}}{(1+r_f)} + \frac{(1-q)P_2^{dd}}{(1+r_f)}\right)}{1+r_f} \\
&= \frac{q^2P_2^{uu}}{(1+r_f)^2} + 2\frac{q(1-q)P_2^{ud}}{(1+r_f)^2} + \frac{(1-q)^2P_2^{dd}}{(1+r_f)^2}.
\end{aligned}$$

$\square$