Calcul Matriciel et Applications

L2 – Mathématique + Economie – Le Mans Université

Notes basées sur les cours de David Nikolovski et de Jean Della-Dora

Christophe Dutang

http://dutangc.free.fr

Année scolaire 2016-2017

Table des matières

Chapitre 1

Algèbre matricielle (2 séances)

1.1 Groupe, anneau, espace vectoriel

Définition 1.1.1 (Groupe). *L'espace E muni de l'opération $+$ noté $(E,+)$ est un groupe lorsque*
- $\forall x, y, z \in E, (x+y)+z = x+(y+z)$ *(associativité),*
- $\exists e \in E, x+e = e+x = x$ *(existence élément neutre),*
- $\forall x \in E, \exists x' \in E, x+x' = x'+x = e$ *(existence d'un symétrique).*

Le groupe est dit commutatif ou abélien si $\forall x, y \in E, x+y = y+x$.

Remarque 1.1.1. *Un groupe est non-vide puisqu'il contient l'élément neutre.*

Exemple 1.1.2. $(\mathbb{Z},+)$ *est un groupe commutatif avec l'élement neutre 0 et comme symétrique de n l'élément $-n$ mais* $(\mathbb{N},+)$ *n'en est pas un.*

Définition 1.1.3 (Anneau). *L'espace E muni des opérations $+$ et $\times$ noté $(E,+,\times)$ est un anneau lorsque*
- $(E,+)$ *est un groupe commutatif (avec e_+ l'élément neutre),*
- $\times$ *est associative,*
- $\times$ *est distributive par rapport $+$, i.e.* $\forall x, y, z \in E, (a+b)\times c = a\times c + b\times c$ *et* $c\times(a+b) = c\times a + c\times b$,
- $\times$ *possède un élément neutre $e_\times$, i.e.* $\forall x \in E, x\times e_\times = e_\times \times x = x$.

L'anneau est dit commutatif ou abélien si $\forall x, y \in E, x\times y = y\times x$. *Si de plus tous les éléments non nuls possèdent un inverse pour $\times$, alors $(E,+,\times)$ est un corps.*

Exemple 1.1.4. $(\mathbb{Z},+,\times)$ *est un anneau mais pas un corps, tandis que* $(\mathbb{R},+,\times)$ *est un corps.*

Définition 1.1.5 (Espace vectoriel). *Un espace E muni de l'opération $+$ et de la multiplication par un scalaire . de $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel noté $(E,+,.)$ lorsque*
- $(E,+)$ *est un groupe commutatif (avec 0_E l'élément neutre),*
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E$, *les opérations suivantes sont vérifiées*

$$\begin{cases} \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y \\ (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x \\ \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x \\ 1x = x \end{cases}$$

Exemple 1.1.6. $(\mathbb{R}, +, .)$ *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel.*

Définition 1.1.7 (Algèbre)**.** *Un espace E muni des opérations $+, \times$ et de la multiplication par un scalaire . de $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-algèbre noté $(E, +, \times, .)$ lorsque*

— *$(E, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel,*
— *$\times$ est distributive par rapport à $+$,*
— *$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E$, $(\lambda.x) \times (\mu.y) = (\lambda\mu).(x \times y)$.*

L'algèbre est dit associative si $+$ est associatif et dit commutative si $\times$ est commutatif.

1.2 Notations et opérations de base pour les matrices

Définition 1.2.1 (Matrice)**.** *Une matrice $\boldsymbol{A}$ est un tableau de nombres réels ou complexes avec n lignes et m colonnes. La matrice se représente par*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{ij},$$

où a_{ij} est appelé terme général de la matrice $\boldsymbol{A}$. Lorsque $n = m$, on parle de matrices carrés. L'ensemble des matrices réelles (resp. complexe) est noté $\mathbb{R}^{n\times m}$ (resp. $\mathbb{C}^{n\times m}$). $\mathbb{K}^{n\times m}$ désigne l'ensemble des matrices de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exemple 1.2.2.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 1.3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & -2 \\ \pi & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.2.1. *Pour $\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{ij} \in \mathbb{K}^{n_A\times m_A}, \boldsymbol{B} = \left(b_{ij}\right)_{ij} \in \mathbb{K}^{n_B\times m_B}$, $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont égales si $n_A = n_B$ et $m_A = m_B$ et $a_{ij} = b_{ij}$.*

Définition 1.2.3 (Somme)**.** *Pour $\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{ij}, \boldsymbol{B} = \left(b_{ij}\right)_{ij} \in \mathbb{K}^{n\times m}$, la matrice $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ est la matrice $\boldsymbol{C} = \left(c_{ij}\right)_{ij}$ dont les coefficients sont $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tout $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.*

Exemple 1.2.4.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 1.3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 1 & -7 & \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1.3 + \pi \end{pmatrix}$$

Proposition 1.2.2. *L'ensemble des matrices $(\mathbb{K}^{n\times m}, +)$ muni de l'opération somme est un groupe commutatif dont l'élément neutre est la matrice nulle. C'est à dire*

$$\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{A} + 0 = \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = 0, \quad \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}.$$

Définition 1.2.5 (Produit par un scalaire)**.** *Pour $\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{ij} \in \mathbb{K}^{n\times m}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, la matrice $\lambda\boldsymbol{A}$ est la matrice $\boldsymbol{C} = \left(c_{ij}\right)_{ij}$ dont les coefficients sont $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ pour tout $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.*

Exemple 1.2.6.

$$\sqrt{2}\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 0 & 7\sqrt{2} & 1.3\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.2.3. *L'ensemble des matrices* $(\mathbb{K}^{n\times m}, +, .)$ *muni de l'opération somme et du produit par un scalaire est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel. C'est à dire* $(\mathbb{K}^{n\times m}, +)$ *est un groupe commutatif et*

$$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}, \quad (\lambda+\mu)\boldsymbol{A} = \lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}, \quad \lambda(\mu\boldsymbol{A}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{A}, \quad 1(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}.$$

Définition 1.2.7 (Produit)**.** *Pour* $\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{ij} \in \mathbb{K}^{n\times m}, \boldsymbol{B} = \left(b_{ij}\right)_{ij} \in \mathbb{K}^{m\times p}$*, la matrice* $\boldsymbol{AB}$ *est la matrice* $\boldsymbol{C} = \left(c_{ij}\right)_{ij}$ *dont les coefficients sont* $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$ *pour tout* $i = 1, \dots, n$*,* $j = 1, \dots, m$*. Autrement dit,*

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1m} \\ & \dots & & \dots & \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{im} \\ & \dots & & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & & b_{1j} & & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \vdots & b_{kj} & \vdots & b_{kp} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & & b_{mj} & & b_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & \sum\limits_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix}_{ij}.$$

Exemple 1.2.8.

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 1.3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -27 \\ 0 & -14 & -13 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.2.4. *L'élément neutre de la multiplication de matrice est la matrice identité*

$$\boldsymbol{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ & \ddots & \\ \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.2.9 (Inverse d'une matrice)**.** *Une matrice* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *est inversible lorsque* $\exists \boldsymbol{B} \in \mathbb{K}^{n\times n}, \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$*. L'inverse si il existe est noté* $\boldsymbol{A}^{-1}$*.*

Proposition 1.2.5. *Pour* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times m}$ *et* $\boldsymbol{B} \in \mathbb{K}^{m\times p}$*, on a*

- $n \neq m \neq p$*, l'existence de* $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ *n'entraine pas l'existence de* $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$*. Néanmoins, la somme est distributive par rapport à la multiplication*

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C},$$

  et la multiplication par un scalaire vérifie

$$\boldsymbol{A}\times(\lambda\boldsymbol{B}) = (\lambda\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B} = \lambda(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}).$$

- $n = m = p$*, l'ensemble des matrices* $(\mathbb{K}^{n\times n}, +, \times)$ *muni des opérations produit et somme est un* $\mathbb{K}$*-anneau. Dans ce cadre là,* $n\times\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{A}^n$ *sont parfaitement définies par itération de la somme et de la multiplication. De plus* $(\mathbb{K}^{n\times n}, +, \times, .)$ *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre associative (mais pas commutative).*

Définition 1.2.10 (Transposée)**.** *La transposée d'une matrice* $\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{ij} \in \mathbb{K}^{n\times m}$ *est l'unique matrice notée* $\boldsymbol{A}^T$ *de* $\mathbb{K}^{m\times n}$ *de terme général* $(a_{ji})_{ij}$*. Une matrice carrée* $\boldsymbol{A}$ *est dit symétrique si* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$*, i.e.* $a_{ij} = a_{ji}$*.*

Exemple 1.2.11.

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 7 \\ 3 & 1.3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -10 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{C}^T = \begin{pmatrix} 7 & 0 & \pi \\ 8 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Définition 1.2.12 (Trace)**.** *La trace d'une matrice* $\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)_{ij} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *est notée* $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Exemple 1.2.13.

$$\mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}) = -11.$$

Proposition 1.2.6. *Lorsque les produits sont compatibles,*

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T\times\boldsymbol{A}^T,\quad \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}),\quad \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}^T) = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^T\times\boldsymbol{A}) = \sum_i\sum_j = a_{ij}^2.$$

1.3 Matrices spéciales

1.3.1 Matrices usuelles

— nulle

$$\boldsymbol{0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

— identité de $\mathbb{K}^{n\times n}$

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

C'est à dire de terme général $i_{ij} = \delta_{ij}$ le delta de Kronecker.

— diagonale de $\mathbb{K}^{n\times n}$

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & d_i & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}.$$

C'est à dire de terme général $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

— triangulaire supérieure de $\mathbb{K}^{n\times n}$

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & & t_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & t_{ii} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & & \dots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

C'est à dire de terme général $t_{ij} = 0$ si $i > j$.

— triangulaire inférieure de $\mathbb{K}^{n\times n}$

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \dots & & 0 \\ t_{21} & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & t_{ii} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ t_{n1} & & \dots & t_{n,n-1} & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

C'est à dire de terme général $t_{ij} = 0$ si $i < j$.

— matrice par bloc

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m_A} & b_{11} & \dots & b_{1m_B} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n_A1} & \dots & a_{n_Am_A} & b_{n_B1} & \dots & b_{n_Bm_B} \\ c_{11} & \dots & c_{1m_C} & d_{11} & \dots & d_{1m_D} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n_C1} & \dots & c_{n_Cm_C} & d_{n_D1} & \dots & d_{n_Dm_D} \end{pmatrix}.$$

Typiquement bloc triangulaire supérieure $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}$, bloc diagonale $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$.

— creuse : matrices avec une majorité de zéros, e.g. matrice identité.

— matrice inversible : matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ telle que $\exists \boldsymbol{B} \in \mathbb{K}^{n\times n}, \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$.

— semblable : $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont semblables si $\exists \boldsymbol{P}$ inversible, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$.

1.3.2 Matrices de transformation géométrique

— homothétie du type $\lambda \boldsymbol{I}$. C'est à dire de terme général $d_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et λ si $i = j$.

— ortogonale : matrice $\boldsymbol{A}$ telle que $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.

— matrice de rotation : matrice orthogonale de déterminant 1. Typiquement

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \dots$$

— matrice de projection : matrice symétrique $\boldsymbol{A}$ telle que $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$.

— matrice de symétrie : matrice $\boldsymbol{A}$ telle que $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$.

— nilpotente : matrice $\boldsymbol{A}$ telle que $\exists n \in \mathbb{N}, \boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{0}$ et $\boldsymbol{A}^{n-1} \neq \boldsymbol{0}$.

— matrice de permutation : matrice dont les colonnes sont une permutation des colonnes de la matrice identité. Autrement dit, matrice de 0 et de 1 où il y a un seul 1 par ligne et par colonne.

1.3.3 Matrices particulières

— matrice de Toeplitz

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots & \dots & a_{-n+1} \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{-1} & a_{-2} \\ \vdots & & \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ a_{n-1} & \dots & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

C'est à dire de terme général a_{ij} n'est fonction que de $|i-j|$.

— matrice de Vandermonde

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & {a_1}^2 & \dots & {a_1}^{n-1} \\ 1 & a_2 & {a_2}^2 & \dots & {a_2}^{n-1} \\ 1 & a_3 & {a_3}^2 & \dots & {a_3}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_m & {a_m}^2 & \dots & {a_m}^{n-1} \end{pmatrix}.$$

C'est à dire de terme général $a_{ij} = (a_i)^{j-1}$

1.4 Calcul de déterminant

Définition 1.4.1 (Déterminant d'une matrice)**.** *On appelle déterminant des matrices carrées de $\mathbb{K}^{n\times n}$ l'unique application $det(:)\,\mathbb{K}^{n\times n} \mapsto \mathbb{K}$ telle que*

(i) $det()$ est une forme n-linéaire des colonnes de $\boldsymbol{A}$,

(ii) $det()$ est une forme alternée des colonnes de $\boldsymbol{A}$,

(iii) $det(\boldsymbol{I}) = 1$, où $\boldsymbol{I}$ est la matrice identité.

Autrement dit, en notant $\boldsymbol{A}_{.,j}$ la $j$ème colonne, (i) $\boldsymbol{A}_{.,j} \mapsto det(\boldsymbol{A})$ est linéaire pour tout j, (ii) si $\exists i,j$ tel que $\boldsymbol{A}_{.,j} = \boldsymbol{A}_{.,i}$ alors $det(\boldsymbol{A}) = 0$. Notons que si $n = 1$, alors $det(\boldsymbol{A}) = a_{11}$.

Définition 1.4.2 (Calcul du déterminant d'une matrice)**.** *On en déduit que le déterminant d'une matrice carrée $\boldsymbol{A}$ de $\mathbb{K}^{n\times n}$ se calcule pour une colonne arbitraire j*

$$det(\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} det(\boldsymbol{A}_{-i,-j}),$$

ou se calcule pour une ligne arbitraire i

$$det(\boldsymbol{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} det(\boldsymbol{A}_{-i,-j}),$$

où $\boldsymbol{A}_{-i,-j}$ est la matrice $\boldsymbol{A}$ privée de la $i$ème ligne et $j$ème colonne. $det(\boldsymbol{A}_{-i,-j})$ est appelée le mineur de $\boldsymbol{A}$ relatif à a_{ij}, $(-1)^{i+j} det(\boldsymbol{A}_{-i,-j})$ le cofacteur de a_{ij}.

Exemple 1.4.3 (Cas particulier : $n = 2$)**.** *Pour une matrice de $\mathbb{K}^{2\times 2}$, le déterminant vaut*

$$det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc$$

Exemple 1.4.4 (Cas particulier : dernière colonne creuse)**.** *Pour une matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & \boldsymbol{A}_{-n,-n} & & \vdots \\ & & & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix},$$

on a $det(\boldsymbol{A}) = det(\boldsymbol{A}_{-n,-n})$.

Exemple 1.4.5 (Cas particulier : $j$ème colonne creuse)**.** *Pour une matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & 1 & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

on a $det(\boldsymbol{A}) = (-1)^{i+j} det(\boldsymbol{A}_{-i,-j})$ *où*

$$\boldsymbol{A}_{-i,-j} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ & \vdots & & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ & \vdots & & & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.4.6 (Cas particulier : triangulaire supérieure)**.** *Pour une matrice*

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & & t_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & t_{ii} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & & \dots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix},$$

on a $det(\boldsymbol{T}) = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}$.

Proposition 1.4.1. *Le déterminant possède les propriétés suivantes :*

- *Si on* ***permute*** *deux lignes ou deux colonnes, le déterminant change de signe.*
- *Si deux lignes ou deux colonnes sont* ***identiques****, le déterminant est nul.*
- *Si on* ***multiplie*** *tous les termes d'une même ligne ou d'une même colonne par* $\mu \in \mathbb{K}$*, le déterminant est multiplié par* μ.
- *On peut* ***ajouter*** *à une colonne (ou une ligne) un multiple d'une autre colonne (ou d'une autre ligne) sans changer la valeur du déterminant. En conséquence, si une ligne ou une colonne est nulle, le déterminant est nul.*
- *Pour deux matrices carrées* $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$*, on a* $det(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = det(\boldsymbol{A})\, det(\boldsymbol{B})$.

Proposition 1.4.2. *Pour une matrice triangulaire par bloc, le déterminant vaut*

$$det\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ 0 & \boldsymbol{C} \end{pmatrix}\right) = det(\boldsymbol{A})\, det(\boldsymbol{C})$$

Démonstration. Idées de preuve : on remarque

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ 0 & \boldsymbol{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ 0 & \boldsymbol{I} \end{pmatrix}.$$

Ensuite on calcule des deux matrices séparément. □

Proposition 1.4.3 (Méthode de Cramer)**.** *Considérons le système linéaire $\boldsymbol{A}x = b$ pour $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Si $\boldsymbol{A}$ est inversible, i.e. $det(\boldsymbol{A}) \neq 0$, alors $x = \boldsymbol{A}^{-1}b$. Notons $\boldsymbol{A}_{.,i}$ la ième colonne de $\boldsymbol{A}$. Ainsi*

$$x_i = \frac{det\left(\widetilde{\boldsymbol{A}}_i\right)}{det(\boldsymbol{A})}, \quad \widetilde{\boldsymbol{A}}_i = (\boldsymbol{A}_{.,1}, \dots, \boldsymbol{A}_{.,i-1}, b, \boldsymbol{A}_{.,i+1}, \dots, \boldsymbol{A}_{.,n}).$$

Proposition 1.4.4 (Inverse d'une matrice)**.** *Soit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Si $\boldsymbol{A}$ est inversible, alors l'inverse peut se calculer de la manière suivante*

1. *calculer $det(\boldsymbol{A})$.*
2. *déterminer la matrice $\widetilde{\boldsymbol{A}}_1$ des cofacteurs $(-1)^{i+j} det(\boldsymbol{A}_{-i,-j})$ de $\boldsymbol{A}$.*
3. *calculer la comatrice $\widetilde{\boldsymbol{A}}_2 = \widetilde{\boldsymbol{A}}_1^T$ en prenant la transposée.*
4. *l'inverse se déduit par $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{\widetilde{\boldsymbol{A}}_2}{det(\boldsymbol{A})}$.*

1.5 Applications linéaires et matrices

Définition 1.5.1 (Application linéaire)**.** *Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension respective n et m. Une application $f : E \mapsto F$ est linéaire lorsque*

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_p, \forall \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_p \in E, f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i \boldsymbol{x}_i\right) = \sum_{i=1}^p \lambda_i f(\boldsymbol{x}_i).$$

En dimension finie, une application linéaire est entièrement caractérisée par une matrice. Soit $(\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_m)$ une base de E (resp. $(\boldsymbol{f}_1, \dots, \boldsymbol{f}_n)$ une base de F). Il existe une matrice $\boldsymbol{A}$ de $\mathbb{K}^{n\times m}$ telle que $f(\boldsymbol{e}_j) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \boldsymbol{f}_i$. C'est à dire pour

$$\boldsymbol{A} = \overbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1m} \\ & \dots & & \dots & \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{im} \\ & \dots & & \dots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}}^{f(\boldsymbol{e}_1),\ \dots,\ f(\boldsymbol{e}_m)} \left.\begin{matrix} \boldsymbol{f}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_n \end{matrix}\right\},$$

on a $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{x}$. $\boldsymbol{A}$ est parfois notée $\mathrm{mat}(f)_{e_j,f_i}$ ou simplement f_A.

Définition 1.5.2 (Image directe et réciproque)**.** *Pour I un sous espace vectoriel de E et $f : E \mapsto F$ une application linéaire, l'image directe est $f(I) = \{f(\boldsymbol{x}), x \in I\}$. Pour J un sous espace vectoriel de F, l'image réciproque $f^{-1}(J) = \{\boldsymbol{x} \in E, f(x) \in J\}$. Ce sont des sous-espaces vectoriels.*

Définition 1.5.3 (Image et noyau)**.** *Pour $f : E \mapsto F$ une application linéaire, l'image est définie par $\mathrm{Im}(f) = f(E)$ et le noyau par $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(0_F)$.*

Exemple 1.5.4. *Pour les matrices*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 1.3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & -2 \\ \pi & \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

les applications linéaires associées (dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$) sont

$$f_A\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 1.3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, f_B\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, f_C\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & -2 \\ \pi & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

où $f_A : \mathbb{K}^3 \mapsto \mathbb{K}^2$, $f_B : \mathbb{K}^3 \mapsto \mathbb{K}^3$, $f_C : \mathbb{K}^2 \mapsto \mathbb{K}^3$. Les images et les noyaux sont

$$\mathrm{Im}(f_A) = \left\{\begin{pmatrix} x - 2y + 3z \\ 7y + 1.3z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2, x, y, z \in \mathbb{K}\right\},$$

$$\mathrm{Ker}(f_A) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3, \begin{pmatrix} x - 2y + 3z \\ 7y + 1.3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ -0.055x \\ 0.296x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{K}\right\}.$$

$$\mathrm{Im}(f_B) = \left\{\begin{pmatrix} x - 2y + 3z \\ 2y \\ -10z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3, x, y, z \in \mathbb{K}\right\}, \mathrm{Ker}(f_B) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3, \begin{pmatrix} x - 2y + 3z \\ 2y \\ -10z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

$$\mathrm{Im}(f_C) = \left\{\begin{pmatrix} zx - 8y \\ -2y \\ \pi x + \sqrt{2}y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3, x, y, z \in \mathbb{K}\right\}, \mathrm{Ker}(f_C) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2, \begin{pmatrix} zx - 8y \\ -2y \\ \pi x + \sqrt{2}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Définition 1.5.5 (Rang)**.** *Pour $f : E \mapsto F$ une application linéaire, le rang de f est la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, i.e. $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$. Pour une matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times m}$, le rang est $\mathrm{rg}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{rg}(f_A) = \dim(\mathrm{Im}(f))$, i.e. dimension de l'espace engendrée par les colonnes de $\boldsymbol{A}$ noté $\mathrm{vect}(A_{.,1}, \dots, A_{.,m})$.*

Définition 1.5.6 (Surjective, injective et bijective)**.** *Pour $f : E \mapsto F$ une application, f est injective lorsque $\forall x \in E, \forall y \in E, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. f est surjective lorsque $\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$. f est bijective lorsque $\forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$.*

Proposition 1.5.1. *Pour $f : E \mapsto F$ une application linéaire, on a*

— *f est injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.*
— *f est surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F$.*
— *f est bijective $\Leftrightarrow$ f est surjective et injective.*

Théorème 1.5.2. *Pour $f : E \mapsto F$ une application linéaire, où E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie, on a*

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$

Proposition 1.5.3. *Soit* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times m}$. *On a* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$. *Ainsi par le théorème du rang,* $0 \leq \mathrm{rg}(A) \leq \min(n, m)$.

Exemple 1.5.7. *Pour l'exemple précédent, on a*

$$\mathrm{rg}(f_A) = \dim(\mathrm{Im}(f_A)) = 2 = \mathrm{rg}(\boldsymbol{A}), \quad \dim(\mathrm{Ker}(f_A)) = 1.$$

$$\mathrm{rg}(f_B) = \dim(\mathrm{Im}(f_B)) = 3 = \mathrm{rg}(\boldsymbol{B}), \quad \dim(\mathrm{Ker}(f_B)) = 0.$$

$$\mathrm{rg}(f_C) = \dim(\mathrm{Im}(f_C)) = 2 = \mathrm{rg}(\boldsymbol{C}), \quad \dim(\mathrm{Ker}(f_C)) = 0.$$

Exemple 1.5.8. *Soit la matrice* $\boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{3\times 5}$ *définie par*

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme elle a trois lignes, $\mathrm{rg}(\boldsymbol{D}) \leq 3$. *De plus,* $\boldsymbol{D}_{1,\cdot} + \boldsymbol{D}_{2,\cdot} = \boldsymbol{D}_{3,\cdot}$, $\mathrm{rg}(\boldsymbol{D}) = \mathrm{rg}(\boldsymbol{D}^T) = \dim(\mathrm{vect}(\boldsymbol{D}_{1,\cdot}, \boldsymbol{D}_{2,\cdot})) = 2$. *Donc* $\dim(\mathrm{Ker}(f_D)) = 5 - 2 = 3$.

1.6 Utilisation des matrices

1.6.1 Lien avec les systèmes linéaires

La résolution de systèmes linéaires, par ex :

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 7 \\ 0 + 7y + 1.3z = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ -2y = 3/2 \\ -10z = 9 \end{cases}$$

peut s'écrire sous la forme matricielle

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3/2 \\ 9 \end{pmatrix} \text{ où } \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 1.3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.6.1 (Pivot de Gauss)**.** *Considérons le système linéaire* $\boldsymbol{A}x = b$ *où* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{K}^n$ *et* $b \in \mathbb{K}^m$. *La méthode de résolution dite du pivot de Gauss consiste à résoudre le système de la manière suivante*

1. *Ordonner les équations de manière à se rapprocher d'une forme triangulaire supérieure.*
2. *Mettre le système sous forme triangulaire en annulant une à une les inconnues.*
3. *Discuter la forme du système obtenu : son rang (nombre de pivot non nul, i.e. nombre d'équations indépendantes), sa compatibilité (entre équations) et son éventuel nombre de paramètres (= nombre d'inconnues - rang).*
4. *Poursuivre la résolution du système, si possible.*

Exemple 1.6.2.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+t & = & a \\ 2x+y+z+u & = & b \\ x+2y-z+t+2u & = & c \\ -x-z-3t+5u & = & d \\ -x+y-2z+t+u & = & e \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+t & = & a \\ -y+z-t+u & = & b-2a \\ y-z+2u & = & c-a \\ y-z-2t+5u & = & d+a \\ 2y+2z+2t+u & = & e+a \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+t & = & a \\ -y+z-t+u & = & b-2a \\ -2t+3u & = & b+c-3a \\ -4t+6u & = & b+d-a \\ -2t+3u & = & e+2b-3a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y+t & = & a \\ -y+z-t+u & = & b-2a \\ -2t+3u & = & b+c-3a \\ 0 & = & -b+d-2c+5a \\ 0 & = & b-c+e \end{array}\right.$$

On a donc un système de rang 3. Le système n'est compatible que si et seulement si a, b, c, d, e vérifie

$$0 = -b+d-2c+5a, 0 = b-c+e.$$

Dans le cas où le système est compatible, on a deux paramètres t et u.

Exemple 1.6.3.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y-z+t-2u & = & -1 \\ 3x+2y+z+t-u & = & 2 \\ x+2y+2t+u & = & -3 \\ -2x+y-3z-t+5u & = & 0 \\ -x-3y+2z+2u & = & 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y-z+t-2u & = & -1 \\ 5y+4z-2t+5u & = & 5 \\ 3y+z+t+3u & = & -2 \\ -y-5z+t+u & = & -2 \\ -4y+z+t & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y-z+t-2u & = & -1 \\ -y-5z+t+u & = & -2 \\ 5y+4z-2t+5u & = & 5 \\ 3y+z+t+3u & = & -2 \\ -4y+z+t & = & 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y-z+t-2u & = & -1 \\ -y-5z+t+u & = & -2 \\ -21z+3t+10u & = & -5 \\ -14z+4t+6u & = & -8 \\ 21z-3t-4u & = & 12 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y-z+t-2u & = & -1 \\ -y-5z+t+u & = & -2 \\ -21z+3t+10u & = & -5 \\ 6t-2u & = & -14 \\ 6u & = & 7 \end{array}\right.$$

Le système est de rang 5 et n'a aucun de paramètre. L'unique solution se déduit en remontant le système.

Exemple 1.6.4.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-5y & = & 3 \\ -x+4y & = & 1 \\ 3x-y & = & -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x+4y & = & 1 \\ 3y & = & 5 \\ 11y & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -x+4y & = & 1 \\ 3y & = & 5 \\ 0 & = & 52 \end{array}\right.$$

Le système n'a aucune solution.

1.6.2 Lien avec les chaines de Markov

Une chaine de Markov est un processus aléatoire $(X_n)_n$ à temps discret à valeurs dans un ensemble d'états E tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall i_0, \ldots, i_{n-2}, i, j, \in E, P(X_n = j | X_{n-1} = i, X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, X_0 = i_0) = p_{ij}.$$

La probabilité p_{ij} représente la probabilité de transition du processus vers l'état j sachant qu'il est dans l'état i. La loi de X_n est donnée par

$$\forall k, P(X_n = k) = P^n \pi$$

où $\pi = (P(X_0 = 1), \ldots, P(X_0 = \mathrm{Card}(E)))$ et $P = (p_{ij})_{ij}$.

Ci-dessous l'exemple d'une matrice de transition

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.6.3 Lien avec les matrices d'adjacence

En mathématiques, une matrice d'adjacence pour un graph fini à n sommets est une matrice de dimension $n \times n$ dont l'élément non-diagonal a_{ij} est le nombre d'arêtes liant le sommet i au sommet j. L'élément diagonal a_{ii} est le nombre de boucles au sommet i.

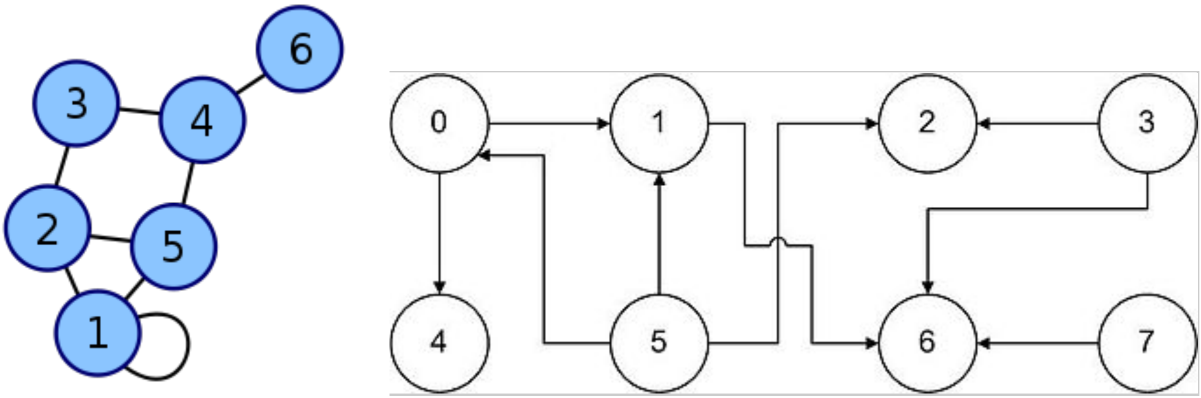
Les matrices d'adjacence du graphe 1.1a (non orienté) de gauche et du graphe 1.1b (orienté) de droite sont respectivement

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.6.4 Lien avec les flashcode

Le code QR ou flashcode est un type de code-barres en deux dimensions (ou code matriciel datamatrix) constitué de modules noirs disposés dans un carré à fond blanc. L'agencement de ces points définit l'information que contient le code.

QR (abréviation de Quick Response) signifie que le contenu du code peut être décodé rapidement après avoir été lu par un lecteur de code-barres, un téléphone mobile, un smartphone, ou encore



(a) graph non-orienté (b) graph orienté

FIGURE 1.1 – Matrices d'adjacence

une webcam. Son avantage est de pouvoir stocker plus d'informations qu'un code à barres 1, et surtout des données directement reconnues par des applications, permettant ainsi de déclencher facilement des actions.

Il en existe de différents types : voir figure 1.2. Les flashcode version 1 sont représentés par des matrices du types suivants où la croix centrale contient les informations à coder

$$
QR_{21} = \begin{array}{c}
\uparrow \\ 7 \\ \downarrow \\ \uparrow \\ 7 \\ \downarrow \\ \uparrow \\ 7 \\ \downarrow
\end{array}
\left\{
\overbrace{
\begin{pmatrix}
1 & \dots & 1 & 0 & & 0 & 1 & \dots & 1 \\
1 & 0 & 1 & \vdots & & \vdots & 1 & 0 & 1 \\
1 & \dots & 1 & 0 & & 0 & 1 & \dots & 1 \\
0 & \dots & 0 & & \uparrow & & & & \\
 & & & \leftarrow & \text{info} & \rightarrow & & & \\
0 & \dots & 0 & & \downarrow & & & & \\
1 & \dots & 1 & & & & & & \\
1 & 0 & 1 & & & & & & \\
1 & \dots & 1 & & & & & &
\end{pmatrix}
}^{\leftarrow 7 \rightarrow \quad \leftarrow 7 \rightarrow \quad \leftarrow 7 \rightarrow}
\right. .
$$

Version 1, 21×21,
10-25 caractères.

Version 2, 25×25,
20-47 caractères.

Version 3, 29×29,
35-77 caractères.

Version 4, 33×33,
67-114 caractères.

Version 10, 57×57,
174-395 caractères.

Version 40, 177×177,
1 852-4 296 caractères.

FIGURE 1.2 – Différents de flashcode

Chapitre 2

Polynômes d'endomorphisme (4 séances)

2.1 Endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 2.1.1 (endomorphisme)**.** *Un endomorphisme de E est une application linéaire f de E dans E dont on note* $\mathrm{mat}(f)_E$ *la matrice associée. On note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.*

Exemple 2.1.2. *Considérons les endomorphismes de $\mathbb{K}^3$ décrits par les matrices suivantes*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Par définition, $u_A(x) = \boldsymbol{A}x$, etc...

Définition 2.1.3 (Sous-espace stable)**.** *Soient $u \in L(E)$ et F un sous espace vectoriel de E. F est stable par u si $u(F) \subset F$. On définit alors l'endomorphisme induit par u sur F comme*

$$u_{|F} : \begin{array}{l} F \mapsto F \\ x \mapsto u(x). \end{array}$$

Proposition 2.1.1. *Soit $u \in L(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie. Si F est un sous-espace vectoriel, alors il existe une base B de E telle que u admet la réprésentation par bloc*

$$\mathrm{mat}(u)_B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{D} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}.$$

De plus, F est stable par $u \Leftrightarrow \boldsymbol{D}$ est la matrice nulle. Dans ce cas, $\boldsymbol{A}$ est la matrice de l'endomorphisme induit de u.

Exemple 2.1.4. *Pour les endomorphismes de $\mathbb{K}^3$ décrits par les matrices précédentes, on peut identifier des sous-espaces stables. Notons*

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{K} \right\}, E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{K} \right\}.$$

E_1 et E_2 sont stables par u_A. Notons

$$F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{K} \right\}, F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{K} \right\}, F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{K} \right\}.$$

F_1, F_2 et F_3 sont stables par u_B. F_2 est stable par u_C.

2.2 Valeur propre, vecteurs propres

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Définition 2.2.1 (Valeur propre). *$\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de l'endomorphisme $u \in L(E)$ signifie qu'il existe $x \in E$, tel que $x \neq 0_E$ et $u(x) = \lambda x$. x est appelé vecteur propre associé à λ.*

Définition 2.2.2 (Vecteur propre). *$x \in E$ est un vecteur propre de l'endomorphisme $u \in L(E)$ signifie que $x \neq 0_E$ et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que $u(x) = \lambda x$. λ est appelé valeur propre associé à x.*

Proposition 2.2.1. *Pour une valeur propre, il y a une infinité de vecteurs propres (de la forme μx pour $\mu \neq 0$). Pour un vecteur propre, il y a une unique valeur propre.*

Démonstration. Soit λ est une valeur propre de $u \in L(E)$. On note x un vecteur propre. Soit $\mu \in \mathbb{K}$ non nul. μx est aussi un vecteur propre de λ puisque $\lambda(\mu x) = \mu(\lambda x) = \mu u(x) = u(\mu x)$.

Si x un vecteur propre possède deux valeurs propres distintces λ_1, λ_2. Par définition, $u(x) = \lambda_1 x = \lambda_2 x$. C'est à dire $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0_E \Leftrightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ ce qui est absurde. □

Remarque 2.2.2. *Un vecteur propre n'est jamais nul mais une valeur propre peut être nulle.*

Proposition 2.2.3. *Soit $u \in L(E)$. λ est une valeur propre de $u \Leftrightarrow \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}) \neq \{0_E\} \Leftrightarrow u - \lambda \operatorname{Id}$ n'est pas injective.*

Démonstration. $\Leftrightarrow^1$
S'il existe $x \in E$, tel que $x \neq 0_E$ et $u(x) = \lambda x$, alors x appartient à $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})$. En effet, $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}) = \{y \in E, (u - \lambda \operatorname{Id})(y) = 0\}$ et $(u - \lambda \operatorname{Id})(x) = 0$. La réciproque est vraie.

$\Leftrightarrow^2$
Comme u et $\lambda \operatorname{Id}$ sont linéaires, $u - \lambda \operatorname{Id} \in L(E)$. Donc $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}) = \{0_E\} \Leftrightarrow u - \lambda \operatorname{Id}$ est injective. Donc la contraposée est vraie dans les deux sens. □

Définition 2.2.3 (Spectre). *Le spectre d'un endomorphisme u dans $\mathbb{K}$ est l'ensemble des valeurs propres de $\mathbb{K}$ de u. On le note $\operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$.*

Définition 2.2.4 (Sous-espace propre). *Le sous-espace propre d'un endomorphisme u pour la valeur propre λ est l'ensemble $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id})$ noté $E(u, \lambda)$.*

Exemple 2.2.5. *Considérons les endomorphismes de* $\mathbb{K}^3$ *décrits par les matrices suivantes*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Cherchons les valeurs propres de u_A *en résolvant*

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = \lambda x \\ x + 7y = \lambda y \\ z = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x = 2y \\ x = (\lambda - 7)y \\ 1 = \lambda \text{ } ou \text{ } z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)(\lambda-7)y = 2y \\ x = (\lambda - 7)y \\ 1 = \lambda \text{ } ou \text{ } z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)(\lambda-7) = 2 \\ x = (\lambda - 7)y \\ 1 = \lambda \text{ } ou \text{ } z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda^2 - 8\lambda + 9 = 0 \\ x = (\lambda - 7)y \\ 1 = \lambda \text{ } ou \text{ } z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1, x = y = 0 \\ ou \\ \lambda = 4 \pm \sqrt{7}, z = 0, x = (\lambda - 7)y \end{cases}$$

Le spectre est donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u_A) = \{1, 4 - \sqrt{7}, 4 + \sqrt{7}\}$. *Trois vecteurs propres associés sont donc respectivement*

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 - \sqrt{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 + \sqrt{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Cherchons les valeurs propres de u_B *en résolvant*

$$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 3z = \lambda x \\ -2y = \lambda y \\ -10z = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-\lambda)x - 2y + 3z = 0 \\ \lambda = -2 \text{ } ou \text{ } y = 0 \\ \lambda = -10 \text{ } ou \text{ } z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2, z = 0, 3x - 2y = 0 \\ \lambda = -10, y = 0, 11x + 3z = 0 \\ \lambda = 1, y = z = 0 \text{ } ou \text{ } x = 0 \end{cases}$$

Le spectre est donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u_B) = \{1, -2, -10\}$. *Trois vecteurs propres associés sont donc respectivement*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -11 \end{pmatrix}.$$

Cherchons les valeurs propres de u_C *en résolvant*

$$\boldsymbol{C}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + 9z = \lambda x \\ -2y + z = \lambda y \\ x + \sqrt{2}z = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7-\lambda)x = -9z \\ z = (\lambda + 2)y \\ x = (\lambda - \sqrt{2})z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (7-\lambda)(\lambda - \sqrt{2})z = -9z \\ y = z/(\lambda + 2) \\ x = (\lambda - \sqrt{2})z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \text{ } ou \text{ } \lambda = 7 + \sqrt{2} \pm \sqrt{87 - 14\sqrt{2}} \\ y = z/(\lambda + 2) \\ x = (\lambda - \sqrt{2})z \end{cases}$$

Le spectre est donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u_C) = \{7 + \sqrt{2} + \sqrt{87 - 14\sqrt{2}}, 7 + \sqrt{2} - \sqrt{87 - 14\sqrt{2}}\}$. *Deux vecteurs propres associés sont donc respectivement*

$$\begin{pmatrix} 7 + \sqrt{87 - 14\sqrt{2}} \\ \frac{1}{9+\sqrt{2}+\sqrt{87-14\sqrt{2}}} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 - \sqrt{87 - 14\sqrt{2}} \\ \frac{1}{9+\sqrt{2}-\sqrt{87-14\sqrt{2}}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.2.4. *Si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes de u, alors les sous-espaces propres correspondants sont en somme directe.*

Remarque 2.2.5. *La somme de deux espaces F_1 et F_2 est $F_1 + F_2 = \{u_1 + u_2, u_1 \in F_1, u_2 \in F_2\}$. Des sous espaces vectoriels F_1 et F_2 de E sont en somme directe $F_1 \oplus F_2$ lorsque $\forall u_1 \in F_1, \forall u_2 \in F_2, u_1 + u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = 0 = u_2$, $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$, n'importe quelle base de $F_1 + F_2$ peut s'écrire sous la forme d'une base de F_1 combinée à une base de F_2.*

Définition 2.2.6 (Valeur propre)**.** *$\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de la matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ signifie qu'il existe $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$, tel que $\boldsymbol{x} \neq 0$ et $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. $\boldsymbol{x}$ est appelé vecteur propre associé à λ.*

Définition 2.2.7 (Vecteur propre)**.** *$\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n$ est un vecteur propre de la matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ signifie que $\boldsymbol{x} \neq 0_E$ et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$, tel que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. λ est appelé valeur propre associé à $\boldsymbol{x}$.*

Proposition 2.2.6. *Soit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ λ est une valeur propre de $\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(u_A - \lambda\,\mathrm{Id}) \neq \{0\} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}$ n'est pas inversible.*

Démonstration. Voir démo de la proposition 2.3.3. □

Remarque 2.2.7. *Le spectre d'une matrice $\boldsymbol{A}$ est $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{A}) = \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u_A)$. De même, le sous-espace propre est $E(\boldsymbol{A}, \lambda) = E(u_A, \lambda) = \mathrm{Ker}(u_A - \lambda\,\mathrm{Id})$.*

2.3 Polynôme caractéristique

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Définition 2.3.1 (polynôme caractéristique)**.** *Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme $u \in L(E)$ est $\chi_u(x) = det(\mathrm{mat}(u)_E - x\boldsymbol{I})$.*
Le polynôme caractéristique d'une matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ est $\chi_A(x) = det(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{I})$.

Remarque 2.3.1. *Cette définition ne dépend pas du choix de la base. Soient B_1 et B_2 de base de E. On note $\boldsymbol{P}$ la matrice de passage, i.e. $\mathrm{mat}(u)_{B_1} = \boldsymbol{P}^{-1}\,\mathrm{mat}(u)_{B_2}\boldsymbol{P}$. On a*

$$det(\mathrm{mat}(u)_{B_1} - x\boldsymbol{I}) = det\left(\boldsymbol{P}^{-1}\,\mathrm{mat}(u)_{B_2}\boldsymbol{P} - x\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\right) = det\left(\boldsymbol{P}^{-1}(\mathrm{mat}(u)_{B_2} - x\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}\right)$$

$$= det\left(\boldsymbol{P}^{-1}\right) det(\mathrm{mat}(u)_{B_2} - x\boldsymbol{I})\, det(\boldsymbol{P}) = det(\mathrm{mat}(u)_{B_2} - x\boldsymbol{I})\, det\left(\boldsymbol{P}^{-1} \times \boldsymbol{P}\right) = det(\mathrm{mat}(u)_{B_2} - x\boldsymbol{I}).$$

Exemple 2.3.2. *Considérons les endomorphismes de $\mathbb{K}^3$ décrits par les matrices suivantes*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 9 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

On a

$$\chi_{u_A}(\lambda) = det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & 7-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 7-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)((1-\lambda)(7-\lambda)+2).$$

$$\chi_{u_B}(\lambda) = det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 3 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -10-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2+\lambda)(10+\lambda).$$

$$\chi_{u_C}(\lambda) = det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 0 & 9 \\ 0 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & \sqrt{2}-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+2) det \begin{pmatrix} 7-\lambda & 9 \\ 1 & \sqrt{2}-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+2) \left((7-\lambda)(\sqrt{2}-\lambda) - 9 \right).$$

Proposition 2.3.2. *Soit $u \in L(E)$ et E de dimension n. χ_u est un polynôme de degré n, donc u possède au plus de n valeurs propres distinctes.*

Proposition 2.3.3. *Soit $u \in L(E)$. Les racines de χ_u dans $\mathbb{K}$ forme le spectre $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(u)$ de u.*

Soit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Les racines de χ_A dans $\mathbb{K}$ forme le spectre $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{A})$ de $\boldsymbol{A}$.

Démonstration.

$$\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{A}) \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n, \boldsymbol{x} \neq 0, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x} \Leftrightarrow (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I} \text{ non inversible } \Leftrightarrow \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0 \Leftrightarrow \lambda \text{ racine de } \chi_A.$$

□

Exemple 2.3.3. *Soit $\boldsymbol{D}$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On distingue le spectre dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. En effet, $\chi_D(x) = x^2 + 1$, ainsi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{D}) = \emptyset$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{D}) = \{-i, i\}$.*

Proposition 2.3.4 (Formule de Newton)**.** *Soit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Le polynôme caractéristique est de degré n et s'écrit*

$$\chi_A(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

avec la récurrence

$$a_0 = (-1)^n, \; a_1 = (-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}), \; j a_j = (-1)^{n-j}\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^j) + s_{j-1}a_1 + \cdots + s_1 a_{j-1}, \; s_k = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^k)$$

pour $j = 1, \ldots n$. En particulier,

$$a_0 = (-1)^n, a_1 = (-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}), a_2 = (-1)^{n-2}\frac{\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^2) - \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})^2}{2}, a_n = det(\boldsymbol{A}).$$

De même, pour $u \in L(E)$ avec $\boldsymbol{A} = \mathrm{mat}_E(u)$.

Démonstration. Nécessite la définition d'un déterminant à l'aide des permutations. □

Exemple 2.3.4. *Pour $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a*

$$det(\boldsymbol{A}) = 9, \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}) = 9 \Rightarrow a_0 = -1, a_1 = 9, a_3 = 9.$$

Calculons $\boldsymbol{A}^2$.

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -16 & 0 \\ 8 & 47 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^2) = 47 \Rightarrow 2a_2 = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^2) - \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})a_1 = \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A}^2) - \mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})^2 \Rightarrow a_2 = -17.$$

Vérifions le polynôme caractéristique.

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} 1-x & -2 & 0 \\ 1 & 7-x & 0 \\ 0 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} 1-x & -2 \\ 1 & 7-x \end{vmatrix} = (1-x)((1-x)(7-x)+2) = (1-x)(x^2-8x+9 \\ &= x^2-8x+9-(x^3-8x^2+9x) = \underbrace{-}_{a_0} x^3 + \underbrace{9}_{a_1} x^2 \underbrace{-17}_{a_2} x + \underbrace{9}_{a_3}.\end{aligned}$$

Proposition 2.3.5. — *Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.*
— *Une matrice et sa transposée ont le même polynôme caractéristique.*

Démonstration. —

$$\det(\boldsymbol{A}-x\boldsymbol{I}) = \det\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}-x\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}\right) = \det\left(\boldsymbol{P}^{-1}\right)\det(\boldsymbol{B}-x\boldsymbol{I})\det(\boldsymbol{P}) = \det(\boldsymbol{B}-x\boldsymbol{I}).$$

—

$$\det\left(\boldsymbol{A}^T-x\boldsymbol{I}\right) = \det\left(\boldsymbol{A}^T-x\boldsymbol{I}^T\right) = \det\left((\boldsymbol{A}-x\boldsymbol{I})^T\right) = \det(\boldsymbol{A}-x\boldsymbol{I}).$$

□

Proposition 2.3.6. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in L(E)$. Si E est décomposable en somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ avec E_i stable pour u, alors*

$$\chi_u(x) = \prod_{i=1}^{p} \chi_{u_{|E_i}}(x),$$

où $u_{|E_i}$ est la restriction de u à E_i.

Théorème 2.3.7 (Cayley-Hamilton)**.** *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Si $u \in L(E)$ alors χ_u est un polynôme annulateur de u, i.e. $\chi_u(u) = 0$.*

Démonstration. Notons $n = \dim(E)$ et $u \in L(E)$. (1)
Supposons qu'il existe $x \neq 0_E$ tel que $x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)$ soient linéairement indépendants, ils forment une base b de E. De plus $u^n(x) \in E$ peut être écrit comme

$$u^n(x) = a_0 x + a_1 u(x) + \cdots + a_{n-1}u^{n-1}(x).$$

Notons P le polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} - X^n$. On a $P(u)(x) = 0$. Comme

$$u\begin{pmatrix} x \\ u(x) \\ \vdots \\ u^{n-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x) \\ u^2(x) \\ \vdots \\ u^n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x) \\ u^2(x) \\ \vdots \\ a_0x + a_1u(x) + \cdots + a_{n-1}u^{n-1}(x) \end{pmatrix},$$

la matrice de u s'écrit

$$\operatorname{mat}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \cdots & & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & a_{n-3} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & & \cdots & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Donc le polynome caractéristique au point x vaut

$$\chi_{\mathrm{mat}_b(u)}(x) = \det\left(\mathrm{mat}(u) - xI_n\right) = \begin{vmatrix} -x & 0 & & \dots & & a_0 \\ 1 & -x & 0 & \ddots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & a_{n-3} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -x & a_{n-2} \\ 0 & & \dots & & 1 & a_{n-1} - x \end{vmatrix}.$$

Sans changer la valeur du déterminant, on ajoute à la première ligne la combinaison des autres lignes suivante $xL_2 + x^2L_3 + \cdots + x^{n-1}L_n$. Du coup, la première colonne devient $0, \dots, 0, P(u)(x)$. Ainsi

$$\chi_{\mathrm{mat}(u)}(x) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & & \dots & & P(u)(x) \\ 1 & -x & 0 & \ddots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & a_{n-3} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -x & a_{n-2} \\ 0 & & \dots & & 1 & a_{n-1} - x \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}P(u)(x) = 0.$$

Comme pour tout i, $P(u)(u^i(x)) = u^i(P(u)(x)) = u^i(0) = 0$ par linéarité de u, on a $P(u)(u)$ est le polynôme nul puisque

$$P(u)(a_0 + a_1u(x) + \cdots + a_{n-1}u^{n-1}(x) - u^n(x)) = \sum_{i=1}^{n} a_iP(u)(u^i(x)) = 0.$$

(2)

On a fait l'hypothèse que les vecteurs x, $u(x)$, …, $u^{n-1}(x)$ engendrent E. Choisissons seulement le plus grand entier k tel que x, $u(x)$, …, $u^{k-1}(x)$ soit un système libre. Cet entier est au moins égale à 1 et existe car E est de dimension fini. Notons $F = \mathrm{vect}(x, u(x), \dots, u^{k-1}(x))$. On a donc la restriction $u_{|F}$ de u à F vérifie $u_{|F} : F \mapsto F$. Complétons x, $u(x)$, …, $u^{k-1}(x)$ par $b_{k+1}, \dots, b_n$ pour obtenir une base b de E. Très logiquement $u(u^p(x)) = u^{p+1}(x) = 1 \times u^{p+1}(x) + 0b_{k+1} + \cdots + 0b_n$ pour $0 \leq p \leq k-2$. De plus, $u^k(x)$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire de x puisque u est linéaire et les vecteurs $u(x)$, …, $u^{k-1}(x)$ sont libres. Donc la matrice de u est du type

$$\mathrm{mat}_b(u) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \Rightarrow \chi_u(x) = \det\left(\begin{pmatrix} A - xI_k & C \\ 0 & B - xI_{n-k} \end{pmatrix}\right) = \chi_{u_{|F}}(x)Q(x)$$

Etudions $\chi_u(u) = \chi_{u_{|F}}(u)Q(u)$. D'après la première partie, on a $\chi_u(u) = 0$ application nulle. Donc $\chi_{u_{|F}}(u_{|F})$ est encore l'application nulle et $\chi_u(u_{|F}) = 0$. De plus, $\chi_u(u_{|E\setminus F}) = 0$.

□

Proposition 2.3.8. *Si le polynôme caractérisable est scindé dans $\mathbb{K}$, c'est à dire*

$$\chi_u(x) = \prod_{i=1}^{p} (x - \lambda_i)^{m_i},$$

pour des valeurs propres distinctes λ_i *de multiplicité* $m_i \in \mathbb{N}^\star$*, alors les sous-espaces propres* $E(u, \lambda_i) = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \,\mathrm{Id})$ *sont en somme directe*

$$\bigoplus_{i=1}^{p} E(u, \lambda_i) \subseteq E,$$

mais n'engendre pas forcément E *(puisque* $1 \leq \dim(E(u, \lambda_i)) \leq m_i$*). Les sous-espaces propres* $E(u, \lambda_i)$ *sont stables par* u*. De plus, le déterminant et la trace valent*

$$det(\mathrm{mat}(u)_E) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{m_i},\ \mathrm{Tr}(\mathrm{mat}(u)_E) = \sum_{i=1}^{p} m_i \lambda_i.$$

Démonstration. Montrons par récurrence que les sous-espaces propre sont en somme directe pour $n = \{1, \ldots, p\}$. Lorsque $n = 1$, c'est évident. Supposons que cela soit vérifié pour $n-1$. Soit $v_1 \in E(u, \lambda_1)$, ..., $v_n \in E(u, \lambda_n)$. Montrons que $v_1 + \cdots + v_n = 0$ entraine $v_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$. On a

$$v_1 + \cdots + v_n = 0 \tag{2.1}$$

$$\left\{\begin{array}{l}(2.1) \Rightarrow u(v_1 + \cdots + v_n) = u(0) \Rightarrow \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \\ (2.1) \Rightarrow \lambda_n v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0\end{array}\right. \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_n)v_1 + \cdots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)v_{n-1} = 0$$

Par l'hypothèse de récurrence, chaque terme est nul $(\lambda_i - \lambda_n)v_i = 0$. Comme $\lambda_i \neq \lambda_n$ (distinction des valeurs propres), $v_i = 0$ pour $i \leq n-1$. Donc $v_n = 0$. Autrement dit la propriété est vérifiée pour n.

Choisissons une valeur propre λ_j et $E_j = E(u, \lambda_j)$. Montrons que $d = \dim(E_j) \leq m_j$. Considérons une base $(v_1, \ldots, v_d)$ de E_j que l'on complète pour obtenir une base b de E. Notons $A = \mathrm{mat}_b(u)$. A est bloc triangulaire

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}(\lambda_j) & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

où $\mathrm{diag}(\lambda_j)$ est de dimension d. Ainsi

$$\det(A - xI_n) = \det(\mathrm{diag}(\lambda_j) - xI_d)\det(C - xI_{n-d}) = (\lambda_j - x)^d \det(C - xI_{n-d}).$$

Ainsi λ_j est bien une valeur propre. Comme $\det(C - xI_{n-d})$ est un polynôme caractéristique d'un endomorphisme sur un espace de dimension $n-d$ donc de degré $n-d$, λ_j est au moins de multiplicité d, i.e. $m_i \geq d$.

□

Proposition 2.3.9. *Soit* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$*. Si* $det(\boldsymbol{A}) \neq 0$ *(i.e.* $\boldsymbol{A}$ *est inversible), la matrice inverse s'écrit*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{-c_n}{c_0}\boldsymbol{A}^{n-1} + \frac{-c_{n-1}}{c_0}\boldsymbol{A}^{n-2} + \cdots + \frac{-c_1}{det(\boldsymbol{A})}$$

où le polynôme caractéristique s'écrit $\chi_A(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i$ *et* $c_0, \ldots, c_n$ *ses coefficients.*

Démonstration. Par le théorème de Cayley-Hamilton, on peut calculer l'inverse d'une matrice $\boldsymbol{A}$. En effet, χ_A est un polynôme annulateur, i.e. $\chi_A(\boldsymbol{A}) = 0$. Comme $c_0 = \det(\boldsymbol{A}) \neq 0$, on a

$$c_n\boldsymbol{A}^n + c_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \cdots + c_1\boldsymbol{A} + c_0\boldsymbol{I}_n = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}\left(\frac{-c_n}{c_0}\boldsymbol{A}^{n-1} + \frac{-c_{n-1}}{c_0}\boldsymbol{A}^{n-2} + \cdots + \frac{-c_1}{c_0}\boldsymbol{I}_n\right) = \boldsymbol{I}_n$$

Il suffit de lire le terme droite comme $\boldsymbol{A}^{-1}$. □

Exemple 2.3.5. *Soit* $\boldsymbol{A}$ *la matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a $\chi_A(x) = -(1+x)^3 - (1+x) + (1+x) = -(1+x)^3$. *Ainsi*

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})^3 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{I} + 3\boldsymbol{A} + 3\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{A}^3 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{A}^{-1} = -3\boldsymbol{I} - 3\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^2.$$

En appliquant directement la formule on a

$$det(\boldsymbol{A}) = -1, \quad \chi_A(x) = -(x^3 + 3x^3 + 3x + 1), \quad \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{-1}{-1}(-1)\boldsymbol{A}^2 + \frac{-1}{-1}(-3)\boldsymbol{A} + \frac{-1}{-1}(-3)\boldsymbol{I}.$$

On trouve donc

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{A}^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier par la méthode du déterminant ce résultat

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{det(\boldsymbol{A})}\begin{pmatrix} 1 & +1 & -1 \\ +1 & 2 & -1 \\ 1 & +1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.3.10. *Soit* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. *Pour* $p \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{A}^p$ *s'écrit simplement par* $\boldsymbol{A}^p = R(\boldsymbol{A})$ *où* $R(x)$ *est le polynôme déterminé comme le reste de la division euclidienne de* x^p *par* χ_A.

Démonstration. Le polynôme x^p peut s'écrire en fonction du polynôme caractéristique χ_A de la forme $x^p = \chi_A(x)Q(x) + R(x)$ où R est le reste de la division euclidienne ($deg(R) < deg(\chi_A)$) et Q le quotient de la division euclidienne. Ainsi, la puissance de $\boldsymbol{A}$ s'écrit simplement par

$$\boldsymbol{A}^p = R(\boldsymbol{A})$$

□

Exemple 2.3.6. *Soit* $\boldsymbol{A}$ *la matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

On a $\chi_A(x) = -x(x-1)(x-2)$. *Le reste de la division euclidienne de* x^p *par* χ_A *est de degré 2. On cherche* $R(x) = ax^2 + bx + c$. *Comme* $x^p = \chi_A(x)Q(x) + R(x)$ *et pour ne pas calculer le polynôme* Q, *on évalue le polynôme* x^p *aux valeurs propres afin de d'annuler le premier terme. Ainsi, on a*

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow c = 0, \\ x = 1 \Rightarrow 1 = a + b + c, \\ x = 2 \Rightarrow 2^p = 4a + 2b + c. \end{cases}$$

Donc $R(x) = (2^{p-1} - 1)x^2 + (2 - 2^{p-1})x$. *Ainsi pour* $p \in \mathbb{N}$,

$$\boldsymbol{A}^p = (2^{p-1} - 1)\boldsymbol{A}^2 + (2 - 2^{p-1})\boldsymbol{A}.$$

2.4 Endomorphisme diagonalisable

Définition 2.4.1 (Endomorphisme diagonalisable)**.** *Un endomorphisme $u \in L(E)$ est diagonalisable si E est une somme directe de sous-espaces propres de u.*

Proposition 2.4.1. *u est diagonalisable.*
- ⇔ *E admet une base de vecteurs propres de u.*
- ⇔ *E admet une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.*
- ⇔ *χ_u est scindé dans $\mathbb{K}$[*] et que chaque sous-espace propre a pour dimension la multiplicité de la valeur propre associée.*
- ⇔ *u admet des sous-espaces propres E_i en somme directe tels que* $\dim(E) = \sum\limits_{i=1}^{p} \dim(E_i)$.

Démonstration. (1) ⇒ (2) On choisit dans chaque sous-espaces propres $E(u, \lambda)$ une base e_λ. La réunion de ces bases $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)}$ est une base de E car $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E(u, \lambda)$. Par définition, tous les vecteurs de la base e_λ sont nécessairement des vecteurs propres de u dans E puisqu'ils appartiennent à $\mathrm{Ker}(u - \lambda\,\mathrm{Id})$.

(2) ⇒ (3) Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteurs propres de u. Autrement dit pour tout $i = 1, \ldots, n$, $u(e_i) = \lambda_i e_i$ (même si λ_i peuvent être égaux suivant la multiplicité des valeurs propres). Dans cette base, $\mathrm{mat}(u)_B = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

(3) ⇒ (4) Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs distinctes de u avec $p \leq n$. Par hypothèse,

$$\mathrm{mat}(u)_B = \begin{pmatrix} \left.\begin{matrix}\lambda_1 & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \lambda_1\end{matrix}\right\} \text{de taille } m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \text{de taille } m_p \left\{\begin{matrix}\lambda_p & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \lambda_p\end{matrix}\right. \end{pmatrix}$$

pour une base B de E. Donc

$$\chi_u(x) = \det\left(mat(u)_B - x\boldsymbol{I}\right) = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - x)^{m_i}.$$

Ce polynôme est bien scindé sur $\mathbb{K}$. On sait que $\dim(E(u, \lambda_i)) \leq m_i$. Dans la base B, il existe m_i vecteurs $e_{i,1}, \ldots, e_{i,m_i}$ tels que $u(e_{i,k}) = \lambda_i e_{i,k}$. Ils sont donc dans le sous espace propre associé à λ_i et libres. Donc $\dim(E(u, \lambda_i)) \geq m_i$, ainsi $m_i = \dim(E(u, \lambda_i))$.

(4) ⇒ (5) Les sous-espaces propres de chaque valeur propre sont en somme directe puisque la matrice de u est représentable par une matrice diagonale. Montrons que $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E(u, \lambda)$. Par hypothèse, $m_i = \dim(E(u, \lambda_i))$ et $\chi_u = \prod_{i=1}^{p} (\lambda_i - x)^{m_i}$. Ainsi

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} E(u, \lambda_i)\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E(u, \lambda_i)) = \sum_{i=1}^{p} m_i = \deg(\chi_u) = n = \dim(E).$$

[*]. polynôme qui peut s'écrire comme produit de polynômes du premier degré dans $\mathbb{K}$.

(5) $\Rightarrow$ (1) Les sous-espaces propres E_i sont en somme directe puisqu'ils correspondent à des valeurs propres différentes. En effet, pour $x \in E_i$ et $y \in E_j$ pour $i \neq j$, on a $u(x) = \lambda_i x$ et $u(y) = \lambda_j y$.

$$x + y = 0 \Rightarrow u(x + y) = u(0) \Leftrightarrow \lambda_i x + \lambda_j y = 0$$

Si $\lambda_i = 0$, alors $y = 0$ donc $x = 0$. Sinon

$$x = \lambda_j(-y/\lambda_i)$$

Donc $x \in E_j \cap E_i$.

$$\begin{cases} u(x) = \lambda_i x \\ u(x) = \lambda_j x \end{cases} \Rightarrow \left\{ \; (\lambda_j - \lambda_i)x = 0 \right.$$

Si $x \neq 0$, x est un vecteur propre et $\lambda_j = \lambda_i$. (impossible) Donc $x = 0 = y$. De plus, $\dim(E) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E_i)$.

$\square$

Exemple 2.4.2. *Pour les matrices* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *et* $\boldsymbol{C}$ *précédentes, on a*

$$\chi_{u_A}(\lambda) = (1-\lambda)((1-\lambda)(7-\lambda)+2) = (1-\lambda)(\lambda - 4 - \sqrt{7})(\lambda - 4 + \sqrt{7}).$$

$$\chi_{u_B}(\lambda) = (1-\lambda)(2+\lambda)(10+\lambda).$$

$$\chi_{u_C}(\lambda) = -(\lambda+2)\left((7-\lambda)(\sqrt{2}-\lambda) - 9\right) = -(\lambda+2)\left(\lambda - 7 - \sqrt{2} \pm \sqrt{87 - 14\sqrt{2}}\right).$$

Comme les valeurs propres sont distinctes, elles sont toutes de multiplicité 1 donc l'espace propre associé est aussi de dimension 1. Donc les matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *et* $\boldsymbol{C}$ *sont diagonalisables.*

Pour la matrice $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\chi_D(\lambda) = (\lambda - i)(\lambda + i)$. *Ainsi* $\boldsymbol{D}$ *est diagonalisable dans* $\mathbb{C}$ *sous la forme*

$$\widetilde{\boldsymbol{D}} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix},$$

mais pas dans $\mathbb{R}$.

Proposition 2.4.2. *Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et n'a que des racines simples est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.*

Démonstration. Immédiat. $\square$

Exemple 2.4.3 (Homothétie)**.** *Une matrice d'homothétie de ratio* k *s'écrit sous la forme*

$$\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} k & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots \\ & & k \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $\chi_H(\lambda) = (k - \lambda)^n$. *C'est déjà une matrice diagonale et le sous-espace associé est* $\mathbb{K}^n$ *!*

Exemple 2.4.4 (Projection)**.** *Soit E_1 le sous-espace de projection, tel que $0 < n_1 = \dim(E_1) < \dim(E) = n$. Notons u la projection de E sur E_1. Par définition d'une projection $u(E_1) = E_1$ et $u(E_1^\perp) = 0$. Autrement dit E_1 est stable par u. Donc il existe une base telle que*

$$\mathrm{mat}(u)_B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{n_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\chi_u(x) = det(\mathrm{mat}(u)_B - x\boldsymbol{I}_n) = (1-x)^{n_1} x^{n-n_1}$. Donc $\mathrm{Sp}(u) = \{0, 1\}$. On a $E(u, 1) = E_1$ et $E(u, 0) = E_1^\perp$. Comme $u(E_1) = E_1$, $\dim(E(u, 1)) = n_1$. Comme les sous-espaces propres associés à des valeurs propres différentes (en l'occurence 1 et 0) sont en somme directe, on a $\dim(E_1^\perp) = \dim(E) - \dim(E_1) = n - n_1$. Donc u est diagonalisable.

Exemple 2.4.5 (Symétrie)**.** *Soit $\boldsymbol{A}$ la matrice d'une symétrie. Par définition $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{I}$, donc $det\left(\boldsymbol{A}^2\right) = 1$ et $\boldsymbol{A}$ est inversible. Comme χ_A est un polynôme annulateur et $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}) = 0$, on a $\chi_A(x)$ est divisible par $x - 1$ et $x + 1$. Donc les deux valeurs propres sont 1 et -1 et n_1 la multiplicité de 1 : $\chi_A(x) = (x-1)^{n_1}\ (x+1)^{n-n_1}$. On retrouve la stabilité sur les sous-espaces : pour tout $x \in E(\boldsymbol{A}, 1)$, $Ax = x$ et pour tout $x \in E(\boldsymbol{A}, -1)$, $Ax = -x$. On peut représenter la symétrie par rapport à $E(\boldsymbol{A}, 1)$ parallèlement à $E(\boldsymbol{A}, -1)$ par*

$$\mathrm{mat}(u)_B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_{n_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{I}_{n_1} \end{pmatrix}.$$

La matrice est diagonale donc une symétrie est bien diagonalisable.

Proposition 2.4.3. *Une matrice réelle symétrique $\boldsymbol{M}$ est diagonalisable dans une base orthornormée telle que la matrice de passage $\boldsymbol{P}$ de la base canonique à cette base soit orthogonale, i.e. $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^T$.*

Démonstration. On procède de la manière suivante :

1. une matrice réelle symétrique admet au moins une valeur propre réelle.
2. le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.
3. un endomorphisme symétrique est représenté par une matrice symétrique dans une certaine base pour un espace vectoriel euclédien.
4. un endomorphisme symétrique admet un vecteur propre.
5. les vecteurs propres associées à des valeurs propres d'un endomorphisme symétrique sont orthogonaux.
6. l'orthogonal d'un sous espace vectoriel est stable par un endomorphisme symétrique.
7. pour tout espace vectoriel euclédien, il existe une base orthornormée de vecteurs propres d'un endomorphisme symétrique.
8. tout endomorphisme symétrique est diagonalisable et la matrice de changement de base est orthogonale.

1.
Une matrice réelle symétrique $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ vérifie $\boldsymbol{M}^T = \boldsymbol{M}$. Comme $\mathbb{R}^{n\times n} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$, on peut considérer $\boldsymbol{M}$ comme une matrice complexe. Comme tout polynome peut être scindé sur $\mathbb{C}$, χ_M est scindé sur $\mathbb{C}$. Soit λ une de ses racines et v un de ses vecteurs propres. On a par conjugaison

$$\boldsymbol{M}v = \lambda v \Rightarrow \overline{\boldsymbol{M}v} = \overline{\lambda v} \Leftrightarrow \overline{\boldsymbol{M}}\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$$

Comme $\boldsymbol{M} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\overline{\boldsymbol{M}} = \boldsymbol{M}$, on a $\boldsymbol{M}\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$, i.e. $\overline{v}$ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$. De plus,

$$\begin{cases} (\overline{v})^T \boldsymbol{M} v = (\overline{v})^T \lambda v = \lambda (\overline{v})^T v \\ (\overline{v})^T \boldsymbol{M} v = (\boldsymbol{M}\overline{v})^T v = (\overline{\lambda}\overline{v})^T v = \overline{\lambda}(\overline{v})^T v \end{cases}$$

Comme $v \neq 0$, $(\overline{v})^T v = ||v||^2 \neq 0$ et $\lambda = \overline{\lambda}$. Autrement dit λ est bien une valeur propre réelle.

2.
Le raisonnement précédent est valable pour toute valeur propre : $\boldsymbol{M}$ a toutes ses valeurs propres réelles, donc χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$.

3.
On dit qu'un endomorphisme u sur un espace E est symétrique par rapport une application bilinéaire symétrique $f : E \times E \mapsto \mathbb{R}$ (i.e. un produit scalaire) lorsque $\forall x, y \in E, f(u(x), y) = f(y, u(x))$. Pour un espace vectoriel E de dimension finie, f est représentable par une matrice $\boldsymbol{P}$. L'égalité précédent revient à $\boldsymbol{P} \times \mathrm{mat}(u) = \mathrm{mat}(u)^T \times \boldsymbol{P}$. Pour un espace vectoriel euclédien, il existe une base orthonormée $\boldsymbol{P} = I$ et donc $\mathrm{mat}(u) = \mathrm{mat}(u)^T$ est symétrique.

4.
Comme $\mathrm{mat}(u)$ est une matrice symétrique, il existe une valeur propre et donc un vecteur propre.

5.
Soient λ, μ deux valeurs propres distinctes et v_λ, v_μ des vecteurs propres associées. On a par bilinéarité du produit scalaire

$$< u(v_\lambda), u_\mu >=< \lambda v_\lambda, u_\mu >= \lambda < v_\lambda, u_\mu > .$$

Comme u est symétrique par rapport à $< .,. >$, on a

$$< u(v_\lambda), u_\mu >=< v_\lambda, u(u_\mu) >=< v_\lambda, \mu u_\mu >= \mu < v_\lambda, u_\mu > .$$

Autrement dit les vecteurs sont orthogonaux

$$\begin{cases} \lambda < v_\lambda, u_\mu >= \mu < v_\lambda, u_\mu > \\ \lambda \neq \mu \end{cases} \Rightarrow < v_\lambda, u_\mu >= 0.$$

6.
Soient $F \subset E$ un sous espace vectoriel et u un endomorphisme symétrique. Comme E est euclédien, $F \oplus F^\perp = E$. Soit $z \in u(F^\perp)$. Il existe donc $x \in F^\perp$, tel que $z = u(y)$. On a pour $x \in F$

$$< x, z >=< x, u(y) >=< u(x), y >$$

Or $y \in F^\perp$ et $u(x) \in u(F) \subset F$ par stabilité. Donc $< u(x), y >= 0 =< x, z >$ et $z = u(y) \in F^\perp$.

7.
Soit $n = \dim(E)$. Si $n = 1$ c'est évident. Pour $n \geq 1$, supposons la propriété soit vraie pour n. Soit E un espace de dimension $n + 1$. Il existe un vecteur propre x de valeur propre λ. L'ensemble $\mathrm{vect}(x) = \{rx, r \in \mathbb{R}\}$ est un sous espace vectoriel stable par u (en effet $u(rx) = ru(x) = r\lambda x \in \mathrm{vect}(x)$). Donc $H = \mathrm{vect}(x)^\perp$ est aussi stable par u et $\mathrm{vect}(x) \oplus H = E$. $\mathrm{vect}(x)$ est de dimension 1 donc H de dimension n. Par récurrence, il existe une base $b = (e_1, \ldots, e_n)$ orthogonale sur H

formée de vecteurs propres. La base $b' = (e_1, \dots, e_n, x/||x||)$ est une base de E orthonormée puisque $e_i \in H = \text{vect}(x)^\perp$ donc $x \perp e_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

8.
D'une part une condition nécessaire et suffisante pour que u soit symétrique est que $\text{mat}_b(u)$ soit symétrique et une base b orthornormée. D'autre part tout endomorphisme symétrique dans un espace euclédien est diagonalisable dans une base orthornormée de vecteurs propres. Enfin la matrice de passage de la base canonique à b est orthogonale. Donc on a $\text{mat}_b(u)$ est diagonalisable avec une matrice de passage canonique. □

2.5 Diagonalisation de matrices

En application de la proposition 2.4.1, on procède de la manière suivante pour diagonaliser la matrice $\boldsymbol{A}$:

1. Calculer le polynôme caractéristique χ_A
2. Si χ_A est scindé dans $\mathbb{K}$, alors
   (a) Déterminer les sous-espaces propres $E(\boldsymbol{A}, \lambda)$ pour $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{A})$.
   (b) Si pour tout $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{A})$, $\dim(E(\boldsymbol{A}, \lambda)) = m(\lambda)$, alors $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable. Ainsi
   $$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1} \Leftrightarrow \boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P},$$
   où $\boldsymbol{D}$ est une matrice diagonale formée des valeurs propres (répétée suivant leur multiplicité) et $\boldsymbol{P}$ est formée des vecteurs propres associées (dans le même ordre).
   (c) Sinon, i.e. $\exists \lambda_0 \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{A})$, $\dim(E(\boldsymbol{A}, \lambda_0)) < m(\lambda_0)$, alors $\boldsymbol{A}$ n'est pas diagonalisable.
3. Si χ_A n'est pas scindé dans $\mathbb{K}$, alors $\boldsymbol{A}$ n'est pas diagonalisable.

Exemple 2.5.1. *Considérons la matrice*
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On en déduit facilement que $\chi_A(x) = (3-x)(4-x)(1-x)$. C'est un polynôme scindé dans $\mathbb{R}$ et les trois valeurs propres sont disctinctes, $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{A}) = \{3, 4, 1\}$. Donc $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable. Cherchons des vecteurs propres. Pour la valeur propre 4, on a
$$\begin{cases} 3x = 4x \\ 8x + 4y = 4y \\ 5x + z = 4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = y \\ z = 0 \end{cases}$$
Donc un vecteur propre est $v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. De même, on trouve des vecteurs propres $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi
$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut calculer $\boldsymbol{P}^{-1}$ à l'aide des déterminants

$$det(\boldsymbol{P}) = 2, \tilde{\boldsymbol{P}}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -(-16) & -5 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \tilde{\boldsymbol{P}}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 16 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que l'on peut aussi choisir un ordre des valeurs propres et obtenir

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -16 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.5.2. *Considérons la matrice symétrique*

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons χ_M

$$\chi_M(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ x & -x & 0 \\ x & 0 & -x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = x^2(3-x).$$

Donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{M}) = \{0, 3\}$. *Cherchons les vecteurs propres de 0.*

$$\left\{ \ x+y+z=0 \right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

Cherchons les vecteurs propres de 3.

$$\begin{cases} x+y+z=3x \\ x+y+z=3y \\ x+y+z=3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x=y \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=x \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

On peut utiliser la matrice de passage suivante mais les vecteurs ne sont par orthonormés

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On choisit $v_1 = (1, -1, 0)/\sqrt{2}$. On cherche un vecteur unitaire orthogonal à v_1, i.e. vérifiant $x - y = 0$ en plus de $x + y + z = 0$. On choisit $v_2 = (1, 1, -2)/\sqrt{6}$. Enfin on choisit $v_3 = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$. On a une décomposition suivante

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

2.6 Trigonalisation de matrices

Définition 2.6.1 (Endomorphisme trigonalisable)**.** *Un endomorphisme $u \in L(E)$ est trigonalisable signifie qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.*

Remarque 2.6.1. *On choisit en général une matrice triangulaire supérieure pour la base $b = (b_1, \dots, b_n)$. Mais il suffit d'utiliser $b' = (b_n, \dots, b_1)$ pour obtenir une matrice triangulaire inférieure.*

Théorème 2.6.2. *Pour $u \in L(E)$, u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé dans $\mathbb{K}$.*

Remarque 2.6.3. *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors tout endomorphisme est trigonalisable.*

En application de la proposition 2.4.1 et du théorème 2.6.2, on procède de la manière suivante pour diagonaliser la matrice $\boldsymbol{A}$:

1. Calculer le polynôme caractéristique χ_A
2. Si χ_A est scindé dans $\mathbb{K}$, alors
   (a) Déterminer les valeurs propres $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{A})$ et les sous-espaces propres $E(\boldsymbol{A}, \lambda)$.
   (b) Si pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{A})$, $\dim(E(\boldsymbol{A}, \lambda)) = m(\lambda)$, alors $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable. Ainsi
   $$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1} \Leftrightarrow \boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P},$$
   où $\boldsymbol{D}$ est une matrice diagonale formée des valeurs propres λ_i (répétée suivant leur multiplicité) et $\boldsymbol{P}$ est formée des vecteurs propres C_i associées (dans le même ordre) à λ_i.
   (c) Sinon $\boldsymbol{A}$ n'est que trigonalisable.
   — On répète la procédure suivante $n-1$ fois.
      i. On choisit une valeur propre $\lambda_1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{A})$.
      ii. Déterminer le vecteur propre $C_1 \in \mathrm{Ker}(u_A - \lambda\,\mathrm{Id})$.
      iii. Compléter C_1 pour obtenir une base $b_1 = (C_1, C_1^2, \dots, C_1^n)$ dans laquelle
      $$\mathrm{mat}_{b_1}(u_A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{A}_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$
      iv. Le polynôme caractéristique de $\boldsymbol{A}_1$ est $\chi_{A_1}(x) = \chi_A(x)/(\lambda_1 - x)$.
      v. On réitère avec $\boldsymbol{A}_1$.
   — On obtient une base $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}, C_1^n$ telle que $\mathrm{mat}(u)$ est triangulaire. La matrice de passage $\boldsymbol{P}$ est obtenue par expression des C_i dans la base canonique.
3. Si χ_A n'est pas scindé dans $\mathbb{K}$ (seulement possible si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), alors $\boldsymbol{A}$ n'est ni diagonalisable ni trigonalisable.

Exemple 2.6.2. *Soit la matrice suivante* $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$$

Le polynôme vaut

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= \begin{vmatrix} -2-x & -1 & 2 \\ -15 & -6-x & 11 \\ -14 & -6 & 11-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 2 \\ 1 & -6-x & 11 \\ 2-2x & -6 & 11-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 2 \\ -1+x & -x & x \\ 2-2x & -6 & 11-x \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ -1+x & -x & -x \\ 2-2x & -6 & -1-x \end{vmatrix} = (1-x)\begin{vmatrix} -x & -x \\ -6 & -1-x \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1+x & -x \\ 2-2x & -1-x \end{vmatrix} \\
&= (1-x)(x+x^2-6x) + (-1+x)(-1-x) + 2x(1-x) \\
&= (1-x)(x^2-5x+x+1+2x) = (1-x)(x^2-2x+1) = (1-x)^3.
\end{aligned}$$

Comme $\chi_A(x) = (1-x)^3$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{A}) = \{1\}$. *Cherchons un vecteur propre* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *associé à la valeur propre 1 :*

$$\left\{\begin{array}{l} -2x-y+2z = x \\ -15x-6y+11z = y \\ -14x-6y+11z = z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3x+2z = y \\ -15x-7(-3x+2z)+11z = 0 \\ -14x-6(-3x+2z)+10z = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -3x+2z = y \\ 2x-z = 0 \end{array}\right.$$

A *n'est pas diagonalisable car le sous espace propre* $E(\boldsymbol{A}, 1)$ *est de dimension 1 (seulement). Donc* $C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$ $(= e_1 + e_2 + 2e_3)$ *est un vecteur propre. Dans la base* $b_1 = (C_1, e_2, e_3)$ *formée à l'aide des vecteurs canoniques de* $\mathbb{R}^3$, ***A*** *s'écrit*

$$\mathrm{mat}_{b_1}(u_A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 9 \\ 0 & -4 & 7 \end{pmatrix},$$

car $u_A(C_1) = \boldsymbol{A}C_1 = C_1$, $u_A(e_2) = \boldsymbol{A}e_2 = -e_1 - 6e_2 - 6e_3 = -C_1 - 5e_2 - 4e_3$ *et* $u_A(e_3) = \boldsymbol{A}e_3 = 2e_1 + 11e_2 + 11e_3 = 2C_1 + 9e_2 + 7e_3$. *On pose* $\boldsymbol{A}_1$ *la partie basse. Son polynôme caractéristique est*

$$\chi_{A_1}(x) = (1-x)^3/(1-x) = (1-x)^2.$$

Cherchons un vecteur propre $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *pour la valeur propre 1.*

$$\left\{\begin{array}{l} -5x+9y = x \\ -4x+7y = y \end{array}\right. \Leftrightarrow 2x = 3y$$

Donc $C_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ $(= 3e_2 + 2e_3)$ *est le deuxième vecteur considéré. Ainsi* $b_2 = (C_1, C_2, e_3)$ *est une base dans laquelle*

$$\mathrm{mat}_{b_2}(u_A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

car $u_A(C_1) = C_1$, $u_A(C_3) = \mathrm{mat}_{b_1}(u_A)e_3 = 2C_1 + 9e_2 + 7e_3 = 2C_1 + 3C_2 + e_3$,

$$u_A(C_2) = \mathrm{mat}_{b_1}(u_A)C_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = C_1 + 3e_2 + 2e_3 = C_1 + C_2,$$

Ainsi $\boldsymbol{A}$ *est semblable à la matrice*

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ -4/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que $\boldsymbol{P}\boldsymbol{T}\boldsymbol{P}^{-1} = A$. *En effet, on a*

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{T}\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 11 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ -4/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}.$$

Chapitre 3

Applications de la diagonalisation et de la trigonalisation (1 séance)

3.1 Calcul de puissance

Proposition 3.1.1. *Soit* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. *Si* $\boldsymbol{A}$ *est diagonalisable, i.e.* $\exists D \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PDP}^{-1}$ *alors* $\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{PD}^m\boldsymbol{P}^{-1}$ *pour* $m \in \mathbb{N}$. *Si de plus* $\boldsymbol{A}$ *est inversible (0 n'est pas valeur propre), alors* $\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{PD}^m\boldsymbol{P}^{-1}$ *pour* $m \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Si $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable, alors il existe $\boldsymbol{D}$ diagonale et $\boldsymbol{P}$ inversible telle que

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PDP}^{-1} \Leftrightarrow \boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}.$$

Donc

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{PDP}^{-1}\boldsymbol{PDP}^{-1} = \boldsymbol{PD}^2\boldsymbol{P}^{-1},\ \dots\ , \boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{PD}^n\boldsymbol{P}^{-1},$$

pour $n \in \mathbb{N}$. Notons que $\boldsymbol{D}^n$ se calcule facilement en prenant la puissance des termes de la diagonale. Si de plus $\boldsymbol{A}$ est inversible (0 n'est pas valeur propre), alors $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{PD}^n\boldsymbol{P}^{-1}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Exemple 3.1.1. *Considérons la matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le chapitre précédent, on a vu que $\boldsymbol{A}$ *est diagonalisable avec*

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{P} \times \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2\times 3^n & 0 & 0 \\ -16\times 3^n & 4^n & 0 \\ 5\times 3^n & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 8(4^n - 3^n) & 4^n & 0 \\ 5/2(3^n - 1) & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pour $n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 3.1.2. *Soit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Si $\boldsymbol{A}$ est trigonalisable, i.e. $\exists T \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{T}\boldsymbol{P}^{-1}$, alors*

$$\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{D}^m + \sum_{k=1}^{(n-1)\wedge m}\binom{m}{k}\boldsymbol{D}^{m-k}(\boldsymbol{T}^+)^k\right)\boldsymbol{P}^{-1}.$$

pour $m \in \mathbb{N}$, $(n-1)\wedge m = \min(n-1, m)$ et $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{T}^+$.

Démonstration. $\boldsymbol{T}$ se décompose en $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{T}^+$ où $\boldsymbol{D}$ est la matrice diagonale avec juste les éléments diagonaux de $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T}^+ = \boldsymbol{T} - \boldsymbol{D}$ est la matrice supérieure avec des zéros sur la diagonale. $\boldsymbol{T}^+$ est une matrice nilpotente puisque $(\boldsymbol{T}^+)^n = 0$. Donc

$$\boldsymbol{T}^m = (\boldsymbol{D} + \boldsymbol{T}^+)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\boldsymbol{D}^{m-k}(\boldsymbol{T}^+)^k = \sum_{k=0}^{(n-1)\wedge m}\binom{m}{k}\boldsymbol{D}^{m-k}(\boldsymbol{T}^+)^k.$$

Ainsi

$$\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{P}\left(\sum_{k=0}^{(n-1)\wedge m}\binom{m}{k}\boldsymbol{D}^{m-k}(\boldsymbol{T}^+)^k\right)\boldsymbol{P}^{-1}.$$

□

Exemple 3.1.2. *Soit la matrice suivante $\boldsymbol{A}$*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}.$$

On sait que $\boldsymbol{A}$ est semblable à la matrice

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 \\ -4/3 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus,

$$\boldsymbol{T} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{D}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{T}^+}.$$

On a $(\boldsymbol{T}^+)^3 = 0$, $\boldsymbol{D}^k = \boldsymbol{D} = \boldsymbol{I}$ et $(\boldsymbol{T}^+)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc pour $m \geq 2$

$$\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{P}\left(\sum_{k=0}^{2} C_m^k \boldsymbol{D}^{m-k}(\boldsymbol{T}^+)^k\right)\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\left(I + m\boldsymbol{T}^+ + \frac{m(m-1)}{2}(\boldsymbol{T}^+)^2\right)\boldsymbol{P}^{-1}$$

$$\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 1 & m & 2m + 3m(m-1)/2 \\ 0 & 1 & 3m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} 1 & m & 3m^2/2 + m/2 \\ 0 & 1 & 3m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}$$

3.2 Calcul d'exponentielle

Définition 3.2.1 (Exponentielle de matrice)**.** *Pour une matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$, l'exponentielle de la matrice $\boldsymbol{A}$ est définie par la série suivante*

$$e^{\boldsymbol{A}} = \sum_{n\geq 0} \frac{\boldsymbol{A}^n}{n!} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \frac{\boldsymbol{A}^2}{2!} + \dots$$

Proposition 3.2.1. *Comme pour les réels, l'exponentielle de matrice transforme les sommes en produit*

$$e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = e^{\boldsymbol{A}} \times e^{\boldsymbol{B}}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} &= \sum_{m\geq 0} \frac{\boldsymbol{T}^m}{m!} = \sum_{m\geq 0} \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \boldsymbol{A}^{m-k}\boldsymbol{B}^k = \sum_{k\geq 0} \boldsymbol{B}^k \sum_{m\geq k} \frac{1}{m!} \frac{m!}{k!(m-k)!} \boldsymbol{A}^{m-k} \\ &= = \sum_{k\geq 0} \frac{\boldsymbol{B}^k}{k!} \sum_{m\geq k} \frac{\boldsymbol{A}^{m-k}}{(m-k)!} = \sum_{k\geq 0} \frac{\boldsymbol{B}^k}{k!} \sum_{j\geq 0} \frac{\boldsymbol{A}^j}{j!} = e^{\boldsymbol{A}} \times e^{\boldsymbol{B}}. \end{aligned}$$

□

Proposition 3.2.2. *Soit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Si $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable, on a*

$$e^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P} e^{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{P}^{-1},$$

où l'exponentielle $e^{\boldsymbol{D}}$ se calcule en prenant l'exponentielle des termes de sa diagonale.

Démonstration.

$$e^{\boldsymbol{A}} = \sum_{n\geq 0} \frac{\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^n\boldsymbol{P}^{-1}}{n!} = \boldsymbol{P} \left(\sum_{n\geq 0} \frac{\boldsymbol{D}^n}{n!} \right) \boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P} e^{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{P}^{-1}.$$

□

Exemple 3.2.2. *Considérons la matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le chapitre précédent, on a vu que $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable avec

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$e^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P} \times \begin{pmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 0 & e^4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} e^3 & 0 & 0 \\ 8(e^4 - e^3) & e^4 & 0 \\ 5/2(e^3 - e) & 0 & e \end{pmatrix},$$

pour $n \in \mathbb{Z}$.

Proposition 3.2.3. *Soit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Si $\boldsymbol{A}$ est trigonalisable, i.e. $\exists T \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{T}\boldsymbol{P}^{-1}$, alors*

$$e^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}\left(e^{\boldsymbol{D}} \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\boldsymbol{T}^+)^k}{k!}\right)\boldsymbol{P}^{-1}.$$

pour $m \in \mathbb{N}$.

Démonstration. $\boldsymbol{T}$ se décompose en $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{D} + \boldsymbol{T}^+$ où $\boldsymbol{D}$ est la matrice diagonale avec juste les éléments diagonaux de $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T}^+ = \boldsymbol{T} - \boldsymbol{D}$ est la matrice supérieure avec des zéros sur la diagonale.

$$e^{\boldsymbol{A}} = \sum_{m\geq 0} \frac{\boldsymbol{A}^m}{m!} = \sum_{m\geq 0} \frac{\boldsymbol{P}\boldsymbol{T}^m\boldsymbol{P}^{-1}}{m!} = \boldsymbol{P}\sum_{m\geq 0} \frac{\boldsymbol{T}^m}{m!}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}^{-1}.$$

Or $e^{\boldsymbol{T}} = e^{\boldsymbol{T}^+}e^{\boldsymbol{D}}$, donc

$$e^{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{D}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(\boldsymbol{T}^+)^k\right)\boldsymbol{P}^{-1}.$$

□

Exemple 3.2.3. *Soit la matrice suivante $\boldsymbol{A}$*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}.$$

On sait que $\boldsymbol{A}$ est semblable à la matrice

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{avec } \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, on sait que

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{T}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (\boldsymbol{T}^+)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\exp(\boldsymbol{A}) &= \boldsymbol{P}\left(e^{\boldsymbol{D}} \times \sum_{k=0}^{2} \frac{(\boldsymbol{T}^+)^k}{k!}\right)\boldsymbol{P}^{-1} \\
&= \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \exp(1) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(1) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(1) \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)\boldsymbol{P}^{-1} \\
&= \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \exp(1) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(1) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 7/2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} e & e & 7/2e \\ 0 & e & 3e \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}
\end{aligned}$$

3.3 Systèmes différentiels linéaires

Définition 3.3.1 (Equation différentielle (ordre 1)). *Une équation différentielle est une équation pour une fonction $y : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant une équation de la forme $F(x, y, y')$. Très souvent la fonction F est linéaire, ainsi l'équation s'écrit sous la forme*

$$a_1 y'(x) + a_0 y(x) = b(x).$$

L'équation sans second membre correspond à $a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$.

Définition 3.3.2 (Système linéaire d'équations différentielles (ordre 1)). *Un système linéaire d'équations différentielles s'écrit*

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}y_1(x) + \cdots + a_{1n}y_n(x) + b_1(x) \\ y_2'(x) = a_{21}y_1(x) + \cdots + a_{2n}y_n(x) + b_2(x) \\ \ldots \\ y_n'(x) = a_{n1}y_1(x) + \cdots + a_{nn}y_n(x) + b_n(x) \end{cases}$$

où $y_1, \ldots, y_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sont des fonctions différentiables et $b_1, \ldots, b_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. Le système s'écrit de manière matricelle

$$Y'(x) = \boldsymbol{A}Y(x) + B(x) \tag{3.1}$$

où les vecteurs et les matrices sont donnés par

$$Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, B(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix}.$$

L'équation sans second membre correspond à

$$Y'(x) = \boldsymbol{A}Y(x) \tag{3.2}$$

On s'intéresse à la recherche des solutions $y_i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant le système précédent. Nous serons amené à calculer les solutions dans le plan complexe, mais on verra que cela ne pose pas de problème particulier. $Y(x) = Y_R(x) + iY_I(x)$ vérifie le système d'équations différentielles (3.2) si $Y_R'(x) + iY_I'(x) = \boldsymbol{A}Y_R(x) + i\boldsymbol{A}Y_I(x) + B(x)$, i.e. $Y_R'(x) = \boldsymbol{A}Y_R(x) + B(x)$ et $Y_I'(x) = \boldsymbol{A}Y_I(x)$.

Théorème 3.3.1 (Existence et unicité). *Si les seconds membres b_i sont continues, alors le système différentiel (3.1) admet une unique solution Y telle que $Y(0) = Y_0$.*

Dans la suite du chapitre, on suppose qu'il n'y a pas de second membre, i.e. $B(x) = 0$.

3.3.1 Cas où $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

Soit $\boldsymbol{P}$ une matrice de passage dans $\mathbb{R}^n$. Par définition, on a $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}$. On pose $\widetilde{Y}(x) = \boldsymbol{P}^{-1}Y(x)$. Le système (3.2) devient

$$Y'(x) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1}Y(x) \Leftrightarrow \widetilde{Y}'(x) = \boldsymbol{D}\widetilde{Y}(x).$$

Autrement dit,

$$\widetilde{Y}'(x) = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \vdots \\ 0 & d_{ii} & 0 \\ \vdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix} \widetilde{Y}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{y}_1'(x) = d_{11}\tilde{y}_1(x) \\ \dots \\ \tilde{y}_n'(x) = d_{nn}\tilde{y}_n(x) \end{cases} \tag{3.3}$$

Proposition 3.3.2. *Si $\boldsymbol{A}$ est une matrice diagonalisable dans $\mathbb{R}$, dont on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres et $V_1, \dots, V_n$ les vecteurs propres, alors l'ensemble des solutions de $Y' = \boldsymbol{A}Y$ forme est un espace vectoriel de dimension n et*

$$Y(x) = \alpha_1 e^{\lambda_1 x} V_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2 x} V_2 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n x} V_n.$$

3.3.2 Cas où $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$

Les valeurs propres, qui sont complexes, sont deux à deux conjuguées. Par exemple pour λ et $\bar{\lambda}$, i.e. $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$ et $\bar{\lambda} = \lambda_R - i\lambda_I$, on associe V et $\overline{V}$. On a

$$\begin{aligned} e^{\lambda x} V &= e^{(\lambda_R + i\lambda_I)x}(V_R + iV_I) = e^{(\lambda_R)x}(V_R + iV_I)(\cos(\lambda_I x) + i\sin(\lambda_I x)) \\ &= e^{\lambda_R x}[V_R\cos(\lambda_I x) - V_I \sin(\lambda_I x) + i(V_I\cos(\lambda_I x) + V_R \sin(\lambda_I x))] \end{aligned}$$

De même

$$e^{\bar{\lambda}x}\overline{V} = e^{(\lambda_R)x}[V_R\cos(\lambda_I x) - V_I\sin(\lambda_I x) - i(V_I\cos(\lambda_I x) + V_R\sin(\lambda_I x))] = \Re(e^{\lambda x}V) - i\Im(e^{\lambda x}V).$$

Donc $\mathrm{vect}(e^{\lambda x}V, e^{\bar{\lambda}x}\overline{V}) = \mathrm{vect}(\Re(e^{\lambda x}V), \Im(e^{\lambda x}V))$. De plus, on a

$$\Re(e^{\lambda x}V) = \frac{e^{\lambda x}V + e^{\bar{\lambda}x}\overline{V}}{2}, \Im(e^{\lambda x}V) = \frac{e^{\lambda x}V - e^{\bar{\lambda}x}\overline{V}}{2i}$$

Ainsi les termes $\alpha e^{\lambda x}V + \beta e^{\bar{\lambda}x}\overline{V}$ se réexpriment sous la forme $a\Re(e^{\lambda x}V) + b\Im(e^{\lambda x}V)$.

Proposition 3.3.3. *Si $\boldsymbol{A}$ est une matrice diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et pas dans $\mathbb{R}$, dont on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres réelles, $\mu_1, \dots, \mu_m$ les valeurs propres complexes et $(V_i)_i, (W_i)_i$ les vecteurs propres correspondants, alors l'ensemble des solutions de $Y' = \boldsymbol{A}Y$ forme est un espace vectoriel de dimension n et*

$$Y(x) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k e^{\lambda_k x} V_k + \sum_{j=1}^{m} (\beta_j \Re(e^{\mu_j x} W_j) + \gamma_j \Im(e^{\mu_j x} W_j)),$$

avec $2m + p = n$.

3.3.3 Cas où $\boldsymbol{A}$ est trigonalisable mais pas diagonalisable

Soit $\boldsymbol{P}$ une matrice de passage dans $\mathbb{R}^n$. Par définition, on a $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{T}\boldsymbol{P}^{-1}$. On pose $\widetilde{Y}(x) = \boldsymbol{P}^{-1}Y(x)$. Le système (3.2) devient

$$Y'(x) = \boldsymbol{P}\boldsymbol{T}\boldsymbol{P}^{-1}Y(x) \Leftrightarrow \widetilde{Y}'(x) = \boldsymbol{T}\widetilde{Y}(x).$$

Autrement dit,

$$\widetilde{Y}'(x) = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{ii} & \vdots \\ \ddots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix} \widetilde{Y}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{y}_1'(x) = t_{11}\tilde{y}_1(x) + \cdots + t_{1n}\tilde{y}_n(x) \\ \dots \\ \tilde{y}_n'(x) = t_{nn}\tilde{y}_n(x) \end{cases} \tag{3.4}$$

Proposition 3.3.4. *Si $\boldsymbol{A}$ est seulement une matrice trigonalisable, alors l'ensemble des solutions de $Y' = \boldsymbol{A}Y$ forme est un espace vectoriel de dimension n dont les solutions se calculent en résolvant récursivement $\widetilde{Y}'(x) = \boldsymbol{T}\widetilde{Y}(x)$ et en changeant de base $Y(x) = \boldsymbol{P}\widetilde{Y}(x)$.*

3.3.4 Exemples

Exemple 3.3.3. *Soit $\boldsymbol{A}$ la matrice $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{B} = 0$. Il est facile de voir $\chi_A(x) = (2-x)(1-x)$ et*

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Le système $Y' = \boldsymbol{A}Y$ a pour solution

$$Y = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} e^{\boldsymbol{D}x} = k_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{2x} = \begin{pmatrix} k_2 e^{2x} \\ k_1 e^x + 4k_2 e^{2x} \end{pmatrix}$$

Exemple 3.3.4. *Soit $\boldsymbol{A}$ la matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\chi_A(x) = (5-x)((4-x)(1-x)-2) + (-2+4) = (6-x)(2+\sqrt{2}-x)(2-\sqrt{2}-x).$$

$\boldsymbol{A}$ est donc diagonalisable à cause des trois valeurs propres distinctes $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{A}) = \{6, 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\}$. Cherchons les vecteurs propres

$$\boldsymbol{A}v = 6v \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y - z = 6x \\ 2x + 4y - 2z = 6y \\ x - y + z = 6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - 2y - 2z = 0 \\ x - y - 5z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ -4z = 0 \\ -6z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Un vecteur propre est $(1, 1, 0)$.

$$\boldsymbol{A}v = (2+\sqrt{2})v \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + y - z = (2+\sqrt{2})x \\ 2x + 4y - 2z = (2+\sqrt{2})y \\ x - y + z = (2+\sqrt{2})z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3-\sqrt{2})x + y - z = 0 \\ 2x + (2-\sqrt{2})y - 2z = 0 \\ x - y + (-1-\sqrt{2})z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + (-1-\sqrt{2})z = 0 \\ (4-\sqrt{2})y + 2\sqrt{2}z = 0 \\ (4-\sqrt{2})y + 2\sqrt{2}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + (1+\sqrt{2})z \\ z = \frac{4-\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}}y \end{cases}$$

Pour $y = -2$*, on obtient le vecteur propre* $(1 + 2\sqrt{2}, -2, -1 - 2\sqrt{2})$*. Pour la valeur* $2 - \sqrt{2}$*, en changeant tous les signes des racines carrés, on obtient le vecteur propre* $(1 - 2\sqrt{2}, -2, -1 + 2\sqrt{2})$*. Les vecteurs propres associés forment la matrice de passage*

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1-2\sqrt{2} & -1+2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des solutions $Y'(x) = \boldsymbol{A}Y(x)$ *est de la forme*

$$Y(x) = \begin{cases} k_1 e^{6x} + k_2(1+\sqrt{2})e^{(2+\sqrt{2})x} + k_3(1-\sqrt{2})e^{(2-\sqrt{2})x} \\ k_1 e^{6x} - 2k_2 e^{(2+\sqrt{2})x} - 2k_3 e^{(2-\sqrt{2})x} \\ k_2(-1-2\sqrt{2})e^{(2+\sqrt{2})x} + k_3(-1+2\sqrt{2})e^{(2-\sqrt{2})x} \end{cases}$$

Exemple 3.3.5. *Soit la matrice suivante* $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique est

$$\chi_A(x) = (1-x)^2(2-x)+1+1-x = (2-x)((1-x)^2+1) = (2-x)((1-x)^2-i^2) = (2-x)(1+i-x)(1-i-x).$$

Donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{A}) = \{2, 1+i, 1-i\}$*. Après calcul, on trouve des vecteurs propres associés suivants*

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, W_1 = \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{W}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sur $\mathbb{C}$*, l'ensemble des solutions s'écrit*

$$Y(x) = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} e^{\boldsymbol{D}x} = \alpha e^{2x} V_1 + \beta e^{(1+i)x} W_1 + \gamma e^{(1-i)x} \overline{W}_1.$$

Sur $\mathbb{R}$*, il faut prendre les parties réelle et imaginaire du vecteur suivant*

$$e^{(1+i)x} W_1 = e^x \begin{pmatrix} ie^{ix} \\ -e^{ix} \\ e^{ix} \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} -\sin(x) + i\cos(x) \\ -\cos(x) - i\sin(x) \\ \cos(x) + i\sin(x) \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ -\cos(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} + ie^x \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}.$$

Donc sur $\mathbb{R}$*, on obtient l'ensemble des solutions suivant*

$$Y(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^x \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ -\cos(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix} + \gamma e^x \begin{pmatrix} \cos(x) \\ -\sin(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.3.6. *Soit la matrice suivante* $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}.$$

On sait que $\chi_A(x) = (1-x)^3$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(\boldsymbol{A}) = \{1\}$ *et* $\boldsymbol{A}$ *est semblable à la matrice*

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{avec } \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

On résout

$$\begin{cases} \tilde{y}_1'(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x) + 2\tilde{y}_3(x) \\ \tilde{y}_2'(x) = \tilde{y}_2(x) + 3\tilde{y}_3(x) \\ \tilde{y}_3'(x) = 2\tilde{y}_3(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{y}_3(x) = k_3 e^{2x} \\ \tilde{y}_2(x) = k_2 e^{x} + 3k_3 e^{2x} \\ \tilde{y}_1(x) = k_1 e^{x} + k_2 e^{x} + 5k_3 e^{2x} \end{cases}$$

Donc

$$Y(x) = \boldsymbol{P}\widetilde{Y}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 e^{x} + k_2 e^{x} + 5k_3 e^{2x} \\ k_2 e^{x} + 3k_3 e^{2x} \\ k_3 e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_1 + k_2)e^{x} + 5k_3 e^{2x} \\ (k_1 + 3k_2)e^{x} + 11k_3 e^{2x} \\ (2k_1 + 5k_2)e^{x} + 20k_3 e^{2x} \end{pmatrix}$$

3.4 Systèmes matriciels $\boldsymbol{X}^2 = \boldsymbol{A}$

Soit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice carrée. Cherchons la matrice inconnue $\boldsymbol{X}$ telle que $\boldsymbol{X}^2 = \boldsymbol{A}$. On note u et v l'endomorphisme associé à $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{X}$ respectivement. Si $u \circ v = v \circ u$ et u est diagonalisable alors u et v se diagonalisent dans la même base. Comme $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P\Delta P}^{-1}$ et $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PDP}^{-1}$, le système se simplifie à

$$\boldsymbol{X}^2 = \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{\Delta}^2 = \boldsymbol{D}.$$

Exemple 3.4.1. *Considérons la matrice*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans le chapitre précédent, on a vu que $\boldsymbol{A}$ *est diagonalisable avec*

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 0 \\ -5/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi l'équation $\boldsymbol{X}^2 = \boldsymbol{A}$ *devient*

$$\begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \pm\sqrt{2} \\ z = \pm\sqrt{1} \end{cases}$$

Les solutions sont donc

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1}, \quad \textit{où } x \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}, y \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, z \in \{-1, 1\}.$$

3.5 Suites récurrentes linéaires

3.5.1 Système multivarié récurrent d'ordre 1

On considère un système (linéaire) de suites dans $\mathbb{K}$. Notons $(u_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ la $i$ème suite considérée. Les d suites vérifient la récurrence

$$U_{n+1} = \boldsymbol{A}U_n \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_{1,n+1} \\ \dots \\ u_{d,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,n} \\ \dots \\ u_{d,n} \end{pmatrix}.$$

3.5.2 Système univarié récurrent d'ordre d

On considère une suite d-récurrente dans $\mathbb{K}$. Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite considérée. La suite vérifie la récurrence

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \dots \\ u_{n+d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ \dots \\ u_{n+d-1} \end{pmatrix}. \Leftrightarrow U_{n+1} = \boldsymbol{A}U_n$$

3.5.3 Résolution

On cherche à simplifier le calcul $U_{n+1} = A^n U_0$. Si $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable dans $\mathbb{K}$, i.e. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PDP}^{-1}$, alors

$$U_{n+1} = \boldsymbol{PDP}^{-1}U_n \Leftrightarrow \boldsymbol{P}^{-1}U_{n+1} = \boldsymbol{DP}^{-1}U_n.$$

On résout en deux étapes le système

$$V_n = \boldsymbol{D}V_{n-1} = \cdots = \boldsymbol{D}^n V_0,\ U_n = \boldsymbol{P}V_n.$$

Ainsi

$$U_n = \boldsymbol{PD}^n\boldsymbol{P}^{-1}U_0.$$

Si $\boldsymbol{A}$ est seulement trigonalisable dans $\mathbb{K}$, i.e. $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PTP}^{-1}$, alors la première étape change

$$V_n = \boldsymbol{T}V_{n-1} = \cdots = \boldsymbol{T}^n V_0,\ U_n = \boldsymbol{P}V_n.$$

Ainsi

$$U_n = \boldsymbol{PT}^n\boldsymbol{P}^{-1}U_0.$$

3.5.4 Exemples

Exemple 3.5.1. *On considère deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ telles que $u_0 = v_0 = 1$ et pour tout $n > 0$, le système suivant est satisfait*

$$\begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -6u_n - 4v_n \end{cases}$$

Le système se réécrit

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Etudions la matrice M

$$\chi_M(x) = (4-x)(-4-x) + 12 = -16 - 4x + 4x + x^2 + 12 = -4 + x^2 = (x-2)(x+2).$$

Comme $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ et χ_M a deux racines distinctes, M est diagonalisable. Cherchons les vecteurs propres.

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 2x \\ -6x - 4y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow x = -y$$

On choisit $v_1 = (1, -1)$.

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = -2x \\ -6x - 4y = -2y \end{cases} \Leftrightarrow 3x = -y$$

On choisit $v_2 = (1, -3)$. Donc $M = \boldsymbol{PDP}^{-1}$ avec

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{PD}^n\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.5.2. *Considérons la suite $(u_n)_n$ vérifiant*

$$u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est

$$\chi_A(x) = (-a-x)(-x) + b = x^2 + ax + b.$$

Si ce polynôme du second degré a discriminant non nul, alors $\boldsymbol{A}$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Notons λ_1 et λ_2 les valeurs propres (conjuguées si complexe). Donc $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2)\boldsymbol{P}^{-1}$. Ainsi

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

Si le discriminant est nul (la valeur propre λ est double), alors $\boldsymbol{A}$ est seulement trigonalisable. On obtient

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} {}^n u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

Considérons par exemple $a = -3, b = 2$. Donc $\chi_A(x) = (x-1)(x-2)$. Cherchons les vecteurs propres

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = x_1 \\ x_1 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \{\ x_1 = x_2 \quad , \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 2x_1 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \{\ x_1 = 2x_2$$

Des vecteurs propres sont $(1,1)$ *et* $(2,1)$. *On en déduit*

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+2^{n+1} \\ 1 & 1+2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 1-2^{n+1} \\ 2^n & 1-2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

Considérons par exemple $a = 2, b = 1$. *Donc* $\chi_A(x) = (x+1)^2$. *Cherchons les vecteurs propres*

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 = -x_1 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \{\ x_1 = -x_2$$

Un vecteur propre est $(1,-1)$. *Donc* $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *On en déduit*

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)^n & n(-1)^{n-1} \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 4

Décompositions classiques de matrices (1 séance)

Dans ce chapitre, nous traitons des décompositions classiques de matrices $\boldsymbol{LU}$, $\boldsymbol{QR}$ et $\boldsymbol{LL}^T$. Par exemple lorsque $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{LU}$, la décomposition est particulièrement utile lorsqu'on veut résoudre les systèmes

$$\boldsymbol{A}x = b_1, \boldsymbol{A}x = b_2, \ldots, \boldsymbol{A}x = b_k,$$

pour un grand nombre k de vecteurs. Dans ce cas, on résout une et une seule fois $\boldsymbol{U}x = y$ et k fois

$$\boldsymbol{L}y = b_1, \boldsymbol{L}y = b_2, \ldots, \boldsymbol{L}y = b_k.$$

Le calcul de ces systèmes est simplifié étant donné que $\boldsymbol{L}$ est une matrice triangulaire inférieure.

4.1 Décompisition LU

La décomposition LU consiste à décomposer une matrice $\boldsymbol{A}$ en un produit d'une matrice triangulaire inférieure $\boldsymbol{L}$ et d'une matrice triangulaire supérieure $\boldsymbol{U}$.

Théorème 4.1.1. *Si une matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ a tous ses mineurs principaux non nuls*[†]*, i.e. $\forall i = 1, \ldots, n$, $det(\boldsymbol{A}_{-i,-i}) \neq 0$, alors $\boldsymbol{A}$ possède une unique décomposition $\boldsymbol{LU}$ où la diagonale de $\boldsymbol{L}$ ne comporte que des 1.*

Malheureusement, toutes les matrices inversibles n'ont pas forcément de décomposition $\boldsymbol{LU}$. Mais elles ont une décomposition $\boldsymbol{PLU}$ où $\boldsymbol{P}$ est une matrice de permutation. Néanmoins, nous présentons seulement un algorithme $\boldsymbol{LU}$ et non $\boldsymbol{PLU}$.

L'algorithme de Gauss fonctionne par itération pour obtenir p matrices particulières inversibles $M_1, \ldots, M_p$ telles que

$$M_p \ldots M_1 \boldsymbol{A} = U.$$

Si $M = M_p \ldots M_1$ est inversible, alors $M^{-1} = M_1^{-1} \ldots M_p^{-1}$ est triangulaire inférieure.

†. Critère de Sylvester.

Définition 4.1.1 (Algorithme de Gauss). *Soit une matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n} = (a_{ij})_{ij}$. L'algorithme est le suivant.*

— *Initialisation : On pose $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A} = (a^1_{ij})_{ij}$.*
— *Pour $i = 1, \dots, n-1$,*
  1. *Si a^i_{11} de $\boldsymbol{A}_i$ est non nul, alors on construit*
$$\boldsymbol{L}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \\ -\frac{a^i_{21}}{a^i_{11}} & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots \\ -\frac{a^i_{n1}}{a^i_{11}} & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  2. *On calcule*
$$\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{A}_i = \begin{pmatrix} a^i_{11} & a^i_{12} & \dots & a^i_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{A}_{i+1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$
  3. *On recommence avec $\boldsymbol{A}_{i+1} = (a^{i+1}_{ij})_{ij}$ de taille diminuée.*

— *Terminaison : $\boldsymbol{L}_n = 1$.*

En sortie, on obtient
$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & \dots & \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -L_n \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} & \dots \\ 0 & 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{L}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{L}_2 \end{pmatrix} (-\boldsymbol{L}_1).$$
et la matrice $\boldsymbol{U}$ a été calculé successivement ligne par ligne.

On peut montrer que
$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \\ l_{21} & \ddots & \ddots & \\ \vdots & l_{ij} & \ddots & \\ l_{n1} & \dots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}, \text{ où } l_{ij} = a^j_{ij}/a^j_{jj}$$
et
$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} a^1_{11} & a^1_{12} & \dots & a^1_{1n} \\ 0 & a^2_{11} & \dots & a^2_{1,n-1} \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & a^n_{11} \end{pmatrix}$$
Par exemple sur une matrice de taille 3, on aura décomposé $\boldsymbol{A}$ par
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a^1_{21}}{a^1_{11}} & 1 & 0 \\ -\frac{a^1_{31}}{a^1_{11}} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2_{21}}{a^2_{11}} & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}.$$

On peut montrer facilement que le produit se simplifie

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}^1}{a_{11}^1} & 1 & 0 \\ -\frac{a_{31}^1}{a_{11}^1} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a_{21}^2}{a_{11}^2} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{a_{21}^1}{a_{11}^1} & 1 & 0 \\ -\frac{a_{31}^1}{a_{11}^1} & -\frac{a_{21}^2}{a_{11}^2} & 1 \end{pmatrix} = \tilde{\boldsymbol{L}}$$

et il est facile de trouver son inverse

$$\tilde{\boldsymbol{L}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}^1}{a_{11}^1} & 1 & 0 \\ \frac{a_{31}^1}{a_{11}^1} & \frac{a_{21}^2}{a_{11}^2} & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}_3.$$

Exemple 4.1.2. *Considérons*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 2 \\ 6 & 8 & -2 & 10 \\ 6 & 7 & -14 & 16 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_1.$$

On démarre l'algorithme avec cette matrice : $\boldsymbol{A}_1 = (a_{ij}^1)$.

-i=1 : Comme $a_{11}^1 = 2 \neq 0$, *on a*

$$\boldsymbol{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 2 \\ 6 & 8 & -2 & 10 \\ 6 & 7 & -14 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -14 & 10 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice $\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_1$ *contient en partie basse* a_{ij}^2.

-i=2 : On pose

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ -2 & -14 & 10 \end{pmatrix}.$$

Comme $a_{22} = 1 \neq 0$, *on a*

$$\boldsymbol{L}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ -2 & -14 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & -20 & 6 \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice $\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{A}_2$ *contient en partie basse* a_{ij}^3.

-i=3 : On pose

$$\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -20 & 6 \end{pmatrix}.$$

Comme $a_{33} = -5 \neq 0$*, on a*

$$\boldsymbol{L}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\boldsymbol{L}_3\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -20 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice $\boldsymbol{L}_3\boldsymbol{A}_3$ *contient en partie basse* a_{ij}^4.
-i=4 : $\boldsymbol{A}_4 = (-2)$ *et* $\boldsymbol{L}_4 = (1)$.

La partie haute de la matrice $\boldsymbol{U}$ *se retrouve en prenant la* j*ème ligne de la matrice* $\boldsymbol{L}_j\boldsymbol{A}_j$ *pour* $j = 1, \ldots, 4$*. Pour la partie basse de la matrice* $\boldsymbol{L}$*, on prend l'opposé de la* j*ème colonne de la matrice* $\boldsymbol{L}_j$ *pour* $j = 1, \ldots, 4$*. Donc* $\boldsymbol{A}$ *se décompose en*

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.1.3. *Considérons*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_1.$$

On démarre l'algorithme avec cette matrice : $\boldsymbol{A}_1 = (a_{ij}^1)$.
-i=1 : Comme $a_{11}^1 = 2 \neq 0$*, on a*

$$\boldsymbol{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

-i=2 : On pose

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Comme $a_{11}^2 = 3/2 \neq 0$*, on a*

$$\boldsymbol{L}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\boldsymbol{L}_2\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 0 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

-i=3 : On a $\boldsymbol{A}_3 = (4/3)$ *de premier coefficient non nul.* $\boldsymbol{L}_3 = (1)$.

Ainsi on prend les lignes des matrices $\boldsymbol{L}_i \boldsymbol{A}_i$ pour obtenir

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}.$$

On prend les colonnes des matrices $\boldsymbol{L}_i$ pour obtenir

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2 Décomposition QR

La décomposition QR consiste à décomposer une matrice $\boldsymbol{A}$ en un produit d'une matrice orthogonale $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{K}^{n \times r}$ et d'une matrice triangulaire supérieure $\boldsymbol{R} \in \mathbb{K}^{r \times m}$.

Théorème 4.2.1. *Si une matrice $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n \times m}$ possède un inverse à droite, i.e. $\exists \boldsymbol{B} \in \mathbb{K}^{m \times n}, \boldsymbol{AB} = I_m$, alors elle possède une unique décomposition $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{QR}$ où $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{K}^{n \times r}$ et $\boldsymbol{R} \in \mathbb{K}^{r \times m}$, où r sera le rang de $\boldsymbol{A}$.*

Définition 4.2.1 (Algorithme de Gram-Schmidt)**.** *Notons $\boldsymbol{A}_{.,1}, \dots, \boldsymbol{A}_{.,n}$ les colonnes de $\boldsymbol{A}$. On souhaite*

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}_{.,1}, \dots, \boldsymbol{A}_{.,n}) = (\boldsymbol{Q}_1, \dots, \boldsymbol{Q}_r) \begin{pmatrix} r_1 & \dots & & \\ 0 & 0 & r_2 & \dots \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & r_r \end{pmatrix}.$$

On note $||.||$ la norme euclédienne.

— *Initialisation : on pose $r = 0$.*
— *Itération : on procède comme suit pour $i = 1, \dots, \min(n, m)$*
  1. *si $r = 0$ alors calculer $p_i = \boldsymbol{A}_{.,i}$.*
  2. *sinon ($r > 0$) calculer $p_i = \boldsymbol{A}_{.,i} - \sum_{j=1}^{r} \boldsymbol{Q}_j^T \boldsymbol{A}_{.,i} \times \boldsymbol{Q}_j$. NB : ($\boldsymbol{Q}_j^T \boldsymbol{A}_{.,i} = \boldsymbol{R}_{j,i}$).*
  3. *si $p_i \neq 0$ alors $r \leftarrow r + 1$ et on calcule*

$$\boldsymbol{Q}_r = p_i/||p_i|| \text{ et } \boldsymbol{R}_r = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_r^T \boldsymbol{A}_{.,1} & \dots & \boldsymbol{Q}_r^T \boldsymbol{A}_{.,m} \end{pmatrix}$$

En sortie, on obtient $\boldsymbol{Q}$ en regroupant les vecteurs colonnes et $\boldsymbol{R}$ les vecteurs lignes. C'est à dire

$$\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{Q}_1, \dots, \boldsymbol{Q}_r) \text{ et } \boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1^T \boldsymbol{A}_{.,1} & \boldsymbol{Q}_1^T \boldsymbol{A}_{.,2} & \dots \\ 0 & \boldsymbol{Q}_2^T \boldsymbol{A}_{.,2} & \dots \\ 0 & 0 & \boldsymbol{Q}_r^T \boldsymbol{A}_{.,r} \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.2.2. *Considérons la matrice suivante*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $r = 0$: chacune des colonne est $\boldsymbol{A}_{.,1}$, $\boldsymbol{A}_{.,2}$, $\boldsymbol{A}_{.,3}$ et $\boldsymbol{A}_{.,4}$.

-i=1 :

$$p_1 = \boldsymbol{A}_{.,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De plus $||p_1|| = \sqrt{1+4+0+4+0} = 3$. *Comme* $p_1 \neq 0$, *on a* $r = 1$ *et*

$$\boldsymbol{Q}_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\boldsymbol{R}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1^T \boldsymbol{A}_{.,1} & \dots & \boldsymbol{Q}_1^T \boldsymbol{A}_{.,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

-i=2 :

$$p_2 = \boldsymbol{A}_{.,2} - \boldsymbol{Q}_1^T \boldsymbol{A}_{.,2} \boldsymbol{Q}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - 6 \times \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donc r *ne change pas.*

-i=3 :

$$p_3 = \boldsymbol{A}_{.,3} - \boldsymbol{Q}_{.,1}^T \boldsymbol{A}_{.,3} \boldsymbol{Q}_{.,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \times \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De plus $||p_3|| = \sqrt{4/9 + 4/9 + 4 + 1/9 + 1} = \sqrt{4+4+36+1+9}/3 = \sqrt{6}$. *Comme* $p_3 \neq 0$, *on a* $r = 2$ *et*

$$\boldsymbol{Q}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\boldsymbol{R}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_2^T \boldsymbol{A}_{.,1} & \dots & \boldsymbol{Q}_2^T \boldsymbol{A}_{.,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{6} & \sqrt{3}/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

-i=4 :

$$p_4 = \boldsymbol{A}_{.,4} - \boldsymbol{Q}_1^T \boldsymbol{A}_4 \boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_2^T \boldsymbol{A}_4 \boldsymbol{Q}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \times \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 0 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

De plus $||p_4|| = \sqrt{1+1/4+1/4} = \sqrt{3/2}$. *Comme* $p_4 \neq 0$, *on a*

$$\boldsymbol{Q}_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

et

$$\boldsymbol{R}_3 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_3^T \boldsymbol{A}_{.,1} & \dots & \boldsymbol{Q}_3^T \boldsymbol{A}_{.,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

On obtient donc

$$\boldsymbol{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & \sqrt{2}/(3\sqrt{3}) & -\sqrt{2/3} \\ 2/3 & -\sqrt{2}/(3\sqrt{3}) & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & 0 \\ 2/3 & 1/(3\sqrt{6}) & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{Q}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & \sqrt{3}/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3}/\sqrt{2} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{R}}.$$

Exemple 4.2.3. *Considérons la matrice suivante*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 12 & -51 & 4 \\ 6 & 167 & -68 \\ -4 & 24 & -41 \end{pmatrix}.$$

On pose $r = 0$ *: chacune des colonne est* $\boldsymbol{A}_{.,1}$, $\boldsymbol{A}_{.,2}$ *et* $\boldsymbol{A}_{.,3}$.

-i=1 :

$$p_1 = \boldsymbol{A}_{.,1} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

De plus $||p_1|| = \sqrt{144+36+16} = 14$. *Comme* $p_1 \neq 0$, *on a* $r = 1$ *et*

$$\boldsymbol{Q}_1 = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 3/7 \\ -2/7 \end{pmatrix}$$

et

$$\boldsymbol{R}_1 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_1^T \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{Q}_1^T \boldsymbol{A}_{.,2} & \boldsymbol{Q}_1^T \boldsymbol{A}_{.,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 98/7 & 147/7 & -98/7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \end{pmatrix}.$$

-i=2 :

$$p_2 = \boldsymbol{A}_{.,2} - \boldsymbol{Q}_1^T \boldsymbol{A}_{.,2} \boldsymbol{Q}_1 = \boldsymbol{A}_{.,2} - 21 \boldsymbol{Q}_1 = \begin{pmatrix} -69 \\ 158 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Comme $p_2 \neq 0$ *et* $||p_2|| = 175$, *alors* r *augmente et*

$$\boldsymbol{Q}_2 = \begin{pmatrix} -69/175 \\ 158/175 \\ 6/35 \end{pmatrix}$$

et

$$\boldsymbol{R}_2 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_2^T \boldsymbol{A}_{.,1} & \dots & \boldsymbol{Q}_2^T \boldsymbol{A}_{.,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 175 & -70 \end{pmatrix}.$$

-i=3 :

$$p_3 = \boldsymbol{A}_{.,3} - \boldsymbol{Q}_1^T \boldsymbol{A}_{.,3} \boldsymbol{Q}_1 - \boldsymbol{Q}_2^T \boldsymbol{A}_{.,3} \boldsymbol{Q}_2 = \boldsymbol{A}_{.,3} + 14\boldsymbol{Q}_1 + 70\boldsymbol{Q}_2 = \begin{pmatrix} -11.6 \\ 1.2 \\ -33 \end{pmatrix}.$$

Comme $p_3 \neq 0$ *alors on augmente* r *et*

$$\boldsymbol{Q}_3 = \begin{pmatrix} -58/175 \\ 6/175 \\ -33/35 \end{pmatrix}.$$

Enfin

$$R_3 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_3^T \boldsymbol{A}_{.,1} & \dots & \boldsymbol{Q}_3^T \boldsymbol{A}_{.,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 6/7 & 69/175 & -58/175 \\ 3/7 & 158/175 & 6/175 \\ -2/7 & -6/35 & -33/35 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 14 & 21 & -14 \\ 0 & 175 & -70 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix}.$$

4.3 Décomposition de Cholesky (LL$^{\mathrm{T}}$)

La décomposition LL$^{\mathrm{T}}$ de Cholesky consiste à décomposer une matrice $\boldsymbol{A}$ en un produit d'une matrice triangulaire inférieure $\boldsymbol{L}$ et de sa transposée.

Théorème 4.3.1. *Si une matrice* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *est une matrice symétrique semi-définie et positive, i.e.* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^T$ *et* $\forall x \in \mathbb{K}^n, x^T\boldsymbol{A}x \geq 0$ *et* $x^T\boldsymbol{A}x = 0 \Rightarrow x = 0$*, alors il existe une unique matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont strictement positifs telle que* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T$*. Dans ce cas, on a* $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{L}^{-T}\boldsymbol{L}^{-1}$*.*

Définition 4.3.1 (Algorithme de Cholesky)**.** *Soit une matrice* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ *symétrique. On cherche à résoudre récursivement*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \boldsymbol{A}_{2,1}^T \\ \boldsymbol{A}_{2,1} & \boldsymbol{A}_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{L}_{2,1} & \boldsymbol{L}_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & \boldsymbol{L}_{2,1}^T \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{L}_{2,2}^T \end{pmatrix}.$$

On en déduit l'algorithme suivant :

— *Initialisation :*

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{A}.$$

— *Itération : pour* $i = 1, \dots, n-1$*,*

1. *On décompose la matrice de travail sous forme de blocs*

$$\boldsymbol{W} = \begin{pmatrix} w_{11} & \boldsymbol{W}_{2,1}^T \\ \boldsymbol{W}_{2,1} & \boldsymbol{W}_{2,2} \end{pmatrix}$$

2. *on calcule*

$$l_{ii} = \sqrt{w_{11}}, \boldsymbol{L}_{i,1} = \frac{1}{l_{ii}} \boldsymbol{W}_{2,1}.$$

3. *on calcule la nouvelle matrice de travail*

$$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}_{2,2} - \boldsymbol{L}_{i,1} \otimes \boldsymbol{L}_{i,1}^T,$$

où $\boldsymbol{L}_{i,1} \otimes \boldsymbol{L}_{i,1}^T$ *est la matrice contenant tous les produits possibles des composantes du vecteur* $\boldsymbol{L}_{i,1}$ *(i.e. le produit de Kronecker de ce vecteur).*

— *Terminaison : on calcule* $l_{nn} = \sqrt{w}_{11}$.

En sortie, on obtient $\boldsymbol{L}$ *en concaténant les vecteurs colonnes*

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & \\ & l_{22} & 0 & \dots \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{L}_{1,1} & \boldsymbol{L}_{2,1} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemple 4.3.2. *Soit* $\boldsymbol{A}$ *la matrice suivante.*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 25 & 15 & -5 \\ 15 & 18 & 0 \\ -5 & 0 & 11 \end{pmatrix}.$$

Pour la première itération, on trouve

$$l_{11} = 5, \boldsymbol{L}_{2,1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 15 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Il reste à factoriser

$$\boldsymbol{A}_{-1,-1} = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Pour la deuxième itération, on trouve

$$l_{22} = 3, \boldsymbol{L}_{2,1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}.$$

Il reste à calculer $\boldsymbol{A}_{-2,-2} = 10 - 1^2 = 9$ *entrainant* $l_{33} = 3$*. Donc*

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$