

# Titrisations des Risques d'Assurance

A.-L. Caillat, C. Dutang, T. Nguyen, Q. Tran, T. Thuy

25 avril 2008



# Sommaire

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Bilan des opérations passées</b>	<b>9</b>
1.1 Titrisation des risques non vie . . . . .	9
1.1.1 Structure d'émission . . . . .	9
1.1.2 Instruments . . . . .	11
1.1.3 Avantages et inconvénients . . . . .	13
1.1.4 Exemples de titrisations . . . . .	16
1.2 Titrisation des risques vie . . . . .	19
1.2.1 Structure d'émission . . . . .	19
1.2.2 Instruments . . . . .	20
1.2.3 Avantages et inconvénients . . . . .	21
1.2.4 Exemples de titrisations . . . . .	23
<b>2 Panorama des méthodes d'évaluation</b>	<b>27</b>
2.1 Modèles à intensité . . . . .	27
2.1.1 Application aux "cat bond" . . . . .	27
2.1.2 Applications aux "mortality" ou "longevity bond" . . . . .	29
2.2 Modèles structurels . . . . .	30
2.2.1 Modèle en temps discret . . . . .	31

2.2.2	Modèle en temps continu . . . . .	31
2.3	Evaluation à l'aide de transformées de probabilités . . . . .	32
2.3.1	Application aux cat bond . . . . .	33
2.3.2	Application au risque de mortalité . . . . .	34
2.3.3	Application au risque de longévité . . . . .	35
2.3.4	La perturbation exponentielle . . . . .	36
2.4	Evaluation à l'aide de fonctions d'utilité . . . . .	37
2.4.1	Fonctions de préférence . . . . .	37
2.4.2	Mesures de risques . . . . .	37
<b>3</b>	<b>Calibration d'un modèle à mortalité stochastique</b>	<b>40</b>
3.1	Présentation de la titrisation Tartan . . . . .	40
3.2	Présentation du modèle . . . . .	42
3.3	Calibration . . . . .	43
3.3.1	Calibration de la composante principale . . . . .	44
3.3.2	Calibration de la composante "catastrophe" . . . . .	44
3.4	Résultat : comparaison avec les "spreads" observés . . . . .	45
	<b>Conclusion</b>	<b>47</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>48</b>
	<b>Webographie</b>	<b>52</b>
	<b>Annexes</b>	<b>53</b>
	<b>A Structure de titrisation d'un ABS</b>	<b>53</b>
	<b>B Une liste (non exhaustive) de titrisations</b>	<b>54</b>

<i>SOMMAIRE</i>	5
<b>C Les processus de Poisson doublement stochastiques</b>	<b>57</b>
<b>D Calibration du modèle affine</b>	<b>58</b>
<b>E Equations Différentielles Ordinaires de Riccati</b>	<b>60</b>



*“If there will be one day such a severe world-wide pandemic that one of the bonds I bought will be triggered, there will be more important things to look after than an investment portfolio.”*  
An anonymous cat-mortality investor<sup>1</sup>.

# Introduction

La titrisation consiste à transférer aux marchés financiers le risque de crédit de certains actifs d’une firme. Concrètement, la firme émet des titres, directement négociables par les investisseurs, dont la performance dépend d’un panier d’actifs illiquides (i.e. non négociables). La titrisation bancaire a vu le jour à cause d’un déficit de fonds sur le marché des hypothèques immobilières aux Etats-Unis. Les banques ont été contraintes de trouver des outils pour le financer. La titrisation était utilisée, à cette époque, pour faciliter le transfert de capital de l’investisseur à l’emprunteur. Le premier produit de titrisation sur hypothèque a été lancé en 1977 par “Bank of America”.

Depuis ce temps, les banques ont utilisé ce procédé financier pour titriser leurs créances ou leurs emprunts hypothécaires. En anglais, on parle de “Asset Backed Securities” et dans certains cas de “Mortgage Backed Securities”. Le marché des MBS, créé dans les années 70, a atteint 1,5 trillion en 2002. Le marché des ABS, plus jeune datant de 1987, a atteint 450 milliards en 2002. Même si le concept de titrisation des risques d’assurance date aussi des années 70 (cf. Gorrivett (1999)), il a fallu attendre les années 90 pour voir apparaître les premières titrisations de risque d’assurance (“insurance securitisation” en anglais).

En effet, après le cyclone Andrew en 1992 puis le séisme Northridge en 1994, la réassurance traditionnelle était incapable de satisfaire les besoins des assurances. Les gigantesques dommages causés par ces catastrophes ont dépassé fortement les calculs théoriques et les estimations des praticiens. Les compagnies d’assurance ont alors dû chercher d’autres moyens pour se couvrir contre des risques catastrophiques. Les obligations non vie sont un de ces moyens. Ainsi la première obligation catastrophe (cat bond) a été émise par Hannover Re en 1994. Dans le même temps (1995), le Chicago Board of Trade a proposé des dérivés sur un indice catastrophe<sup>2</sup>. Ces dernières années les volumes de titres adossés à un risque d’assurance (“Insurance Linked Securities” noté ILS par la suite) n’ont cessé d’augmenter pour atteindre un montant de 37 milliards en 2007<sup>3</sup>.

Non seulement les compagnies d’assurance non vie font appel à la titrisation, mais aussi les compagnies d’assurance vie pour se protéger contre les risques de mortalité et de longévité. D’une part, les titrisations aident les assureurs à mieux gérer leurs fonds propres en leur permettant de monétiser les actifs incorporels, de libérer du capital pour d’autres objectifs de la société tels qu’une acquisition, un rachat d’actions ou un investissement dans un autre marché. D’autre part, elles sont un outil pour atténuer les pressions sur les exigences de capital réglementaires, en particulier sur le marché américain où ces exigences sont très lourdes.

---

<sup>1</sup>citation tirée de Bauer & Kramer (2007).

<sup>2</sup>cf. Gorrivett (1999) - section 5-A pour des exemples d’options et de swap. Doherty (1997) souligne que les dérivés cat ne suppriment le risque de crédit.

<sup>3</sup>cumul vie et non-vie.

Notre approche a été d'étudier de manière générale deux éléments essentiels d'une titrisation : sa structuration et son évaluation. Puis nous nous sommes concentrés sur un risque d'assurance particulier : le risque mortalité. Ce rapport est divisé en trois chapitres. Tout d'abord, nous faisons un bilan assez exhaustif des opérations de titrisations (d'assurance) passées, en mettant l'accent sur sa structuration. Dans un second temps, nous réalisons un panorama des méthodes d'évaluations des produits issus des titrisations des risque d'assurance. Enfin, le troisième et dernier chapitre présente une application numérique d'un modèle à mortalité stochastique.

# Chapitre 1

## Bilan des opérations passées

Ce premier chapitre se concentre sur les opérations de titrisations passées. Il est divisé en deux volets, le premier sur les risques non vie, et le second sur les risques vie. Les deux sections se présentent sur le même modèle : une présentation des structures d'émission, les instruments de titrisations, les avantages/inconvénients et des exemples de titrisations.

### 1.1 Titrisation des risques non vie

Ces activités sont essentiellement orientées vers le transfert de risques extrêmes vers les marchés financiers. Elles sont une alternative aux activités de réassurance traditionnelle et sont donc classées parmi les nouvelles méthodes de gestion des risques dites "ART" (Alternative Risk Transfer). Il ne s'agit pas de remplacer la réassurance mais bien d'augmenter les capacités du marché à l'aide de protections originales. On distingue deux natures de titrisation<sup>1</sup> : les titrisations des risques à caractère catastrophique, qui sont les plus représentées en assurance non-vie et les titrisations de risques non-catastrophiques que l'on retrouve dans quelques exemples particuliers comme la titrisation du portefeuille d'assurance automobile d'AXA<sup>2</sup>.

#### 1.1.1 Structure d'émission

Le transfert du risque d'assurance aux marchés financiers est réalisé par l'intermédiaire d'une structure juridique indépendante (voir figure 1.1) : le SPV (Special Purpose Vehicle), souvent implanté dans un paradis fiscal<sup>3</sup>. Le sponsor, en général une compagnie d'assurance ou de réassurance, crée ce SPV pour émettre les titres et lui verse une prime. Les fonds confiés par les investisseurs au SPV lorsqu'ils achètent les titres seront versés au sponsor si un événement de forte intensité survient. Cet événement est défini par un seuil de déclenchement ("loss trigger") prédéfini. Ces structures sont très semblables aux titrisations bancaires (cf. annexe A pour le montage général d'un "asset backed security" quelconque).

---

<sup>1</sup>cf. étude Sigma - Helfenstein (2006).

<sup>2</sup>cf. communiqué de presse *Axa lance la première titrisation d'un portefeuille d'assurance automobile* (2005).

<sup>3</sup>"offshore" en anglais, typiquement les îles Cayman, les Bermudes...

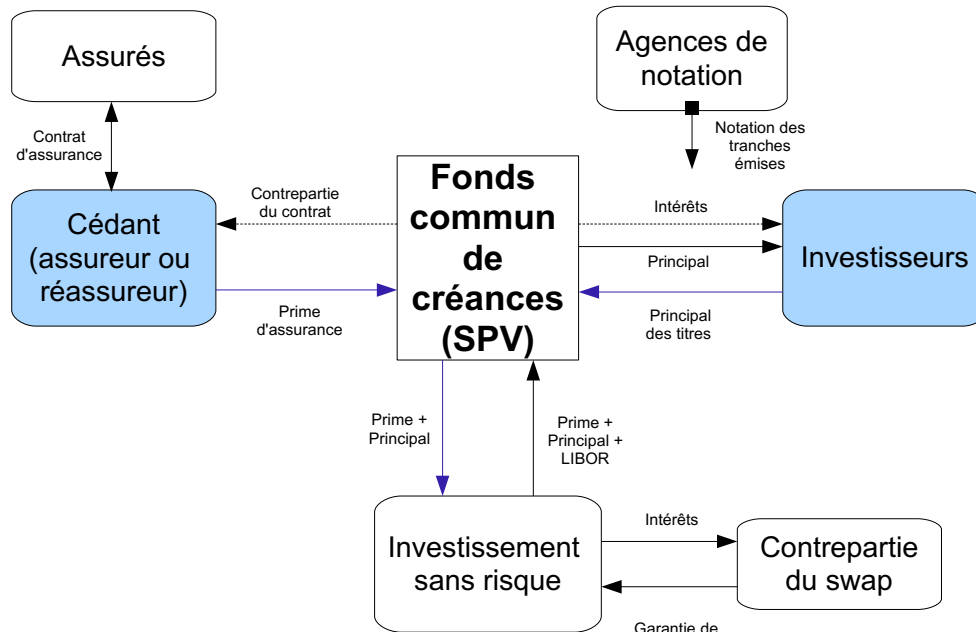


FIG. 1.1 – Structure de titrisation

Selon les émissions, l'investisseur prend un risque différent : le coupon et/ou le nominal peuvent être risqués. En cas de réalisation de l'événement défini (la catastrophe), les titres sont liquidés pour payer les pertes de l'assureur et donc :

- si le principal est variable, l'investisseur perd une partie ou la totalité de son investissement initial,
- si le principal est protégé, l'investisseur peut perdre les intérêts sur ses titres mais il récupérera le principal à la maturité.

En cas de non-réalisation de l'événement avant la maturité des titres, l'investisseur reçoit le principal et les intérêts (souvent le LIBOR<sup>1</sup> plus un spread lié à la prime versée par le sponsor).

Pour garantir à l'investisseur le remboursement du principal, le SPV doit investir sur des actifs peu risqués. Il ne s'agit pas de jouer la performance mais de sécuriser les investissements. La prime provenant du sponsor et le principal des titres des investisseurs sont généralement placés par le SPV dans une société d'investissements financiers. Le "swap counterparty" est une compagnie de services financiers qui investit les montants du SPV et garantit un taux d'intérêt autour du LIBOR par exemple. L'investisseur ne tient pas à supporter un autre risque que le risque cat.

La difficulté, lors de l'émission d'ILS, réside dans la définition de l'événement qui va déclencher le remboursement des pertes au sponsor. Une méthode consiste à définir explicitement un seuil de perte des assurés ou de l'assureur à partir duquel le SPV va reverser une indemnité au sponsor. Ce modèle indemnitaire à l'avantage de rembourser l'assureur en fonction du coût réel qu'il doit assumer. En revanche, la transparence dans la définition de l'événement n'est pas totale pour l'investisseur et cela oblige le sponsor à donner des informations sur son portefeuille d'assurance aux marchés.

<sup>1</sup>London InterBank Offered Rate

Une autre méthode utilise des indices (e.g. météorologiques) pour déterminer le seuil de déclenchement du contrat. Les indices comme l'échelle de Richter pour les tremblements de terre ou ceux créés par Météo France et Euronext ont l'avantage d'être conçus indépendamment du sponsor et des investisseurs. Il existe également des indices qui prennent en compte l'ensemble des pertes du secteur de l'assurance. Leur inconvénient est de ne pas être directement liés aux pertes de l'assureur. Celui-ci supporte donc un risque de base en cas de non-corrélation des indemnités qu'il verse à ses assurés et des indemnités qu'il reçoit de la titrisation du risque. Enfin les modèles paramétriques, combinent le plus souvent des indices et une modélisation de scénarios pour déterminer le loss trigger.

### 1.1.2 Instruments

L'étude Sigma de Swiss Re<sup>1</sup> répertorie six catégories d'instruments de gestion des risques et des fonds propres des assureurs non-vie : la réassurance classique, les obligations catastrophe (cat bonds), les swaps catastrophe, les Industry Loss Warranties (ILW), le capital conditionnel (contingent capital) et les side-cars.

#### Cat-bonds

Les catastrophes naturelles des années 90 ont été le révélateur du manque de capacité de l'industrie traditionnelle d'assurance et de réassurance pour couvrir des sinistres d'une telle intensité. Le cyclone Andrew en Floride en 1992 a coûté près de 20 milliards de dollars aux assureurs et le tremblement de terre de Northridge en Californie en 1993 a provoqué selon les estimations, entre 13 et 20 milliards de dollars de dégâts. Face à ces montants considérables, les assureurs ont pris conscience de la nécessité de chercher d'autres types de protection pour faire face à des événements extrêmes, amenés à se reproduire sans doute plus fréquemment à l'avenir. L'intensification des catastrophes naturelles est à l'origine du développement des titrisations sous la forme de Cat'Bonds.

Année	Lieu	Evènement	Pertes Assurées	Dommages économiques
1992	Floride, Golfe du Mexique	Ouragan Andrew	20	30
1994	Californie (Northridge)	Tremblement de terre	15	50
1995	Japon (Kobe)	Tremblement de terre	5	100
		Total	40	180
2005	Floride	Ouragan Katrina	40	100

TAB. 1.1 – Pertes (en milliards USD) des catastrophes naturelles<sup>2</sup>

Parallèlement à la multiplication des phénomènes naturels catastrophiques, les assureurs constatent l'insuffisance de leur capital pour couvrir des risques dont le coût s'accroît. Ils décident de faire

<sup>1</sup>Helfenstein (2006).

<sup>2</sup>Sources : EQECAT ([www.eqecat.com](http://www.eqecat.com)) et Insurance Information Institute ([www.iii.org](http://www.iii.org)).

appel aux marchés financiers via la titrisation de leurs risques d'assurances tout comme le font leurs collègues banquiers pour financer leur risque de crédit.

Au-delà de la nécessité historique, c'est l'engouement pour les produits de titrisation qui a conduit à leur développement. Les acteurs du marché, aussi bien investisseurs dans les titres, qu'acheteurs de protection, ont trouvé leur intérêt à créer un marché dynamique. Les premières émissions de cat bonds datent de 1996 et 1997. Les émissions concernaient alors principalement trois régions principales, les Etats-Unis, la Californie, le Japon, pour deux types de risques : les ouragans et les tremblements de terre.

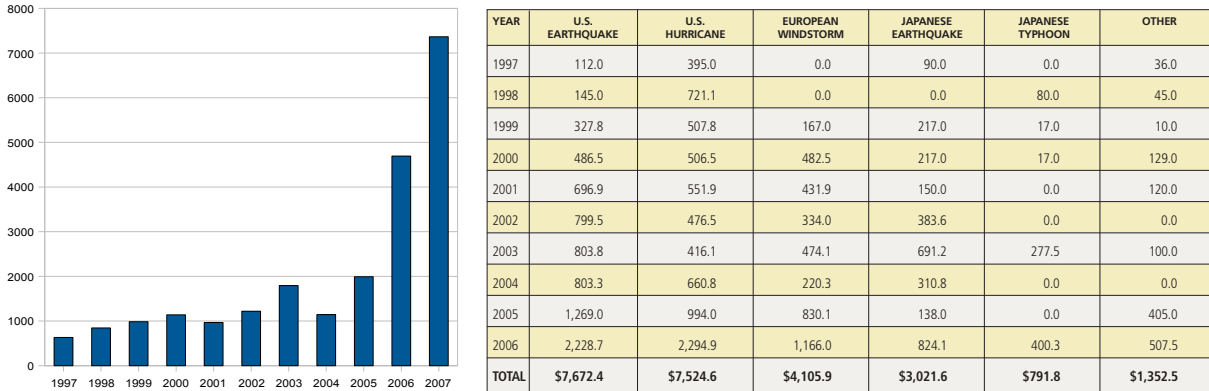


FIG. 1.2 – Montants des émissions de cat bond et bilan du marché cat (millions USD)<sup>1</sup>

## Autres types de titrisation non vie

### Industry Loss Warranties

Les Industry Loss Warranties (ILW) (au départ nommés Original Loss Warranties (OLW)) sont des protections dont le déclenchement s'effectue en fonction des pertes assurées en catastrophe pour l'ensemble d'un secteur. L'évaluation de ces produits de transfert de risque est donc réalisée simplement à partir des estimations des pertes attendues pour un secteur donné et non celles d'une seule entreprise. Il existe donc un risque de base (cf. Zeng (2000)) important lorsque les pertes du portefeuille titrisé sont plus importantes que les pertes de l'industrie au global. Ainsi le risque sera plus important pour un assureur qui titrise un portefeuille dont l'exposition ne correspond pas à celle du marché choisi. C'est pourquoi ceux qui ont recours à ce type de couverture veillent à ce que leur activité soit fortement corrélée à celle du secteur pris en compte.

Plusieurs paramètres structurent les ILW : le type de risque (tempête, tremblement de terre,...), le seuil de perte qui déclenche l'indemnisation, la zone géographique concernée. On obtient donc des titres spécialisés qui peuvent intéresser des investisseurs soucieux de cibler leurs placements. Le seuil de perte peut être identifié par événement ou par pertes cumulées sur une année à l'image des types de traités proposés par les réassureurs (excédent de sinistre et excédent de perte). Un exemple d'ILW est la titrisation de Mont Forte Re réalisé en 2006 pour couvrir contre les zones de

<sup>1</sup>Source : étude Guy Carpenter - McGhee et al. (2007).

pic extrême des tremblements de terre (8 sur l'échelle de Richter) et des ouragans (catégorie 4). Le sponsor était Flagstone Re pour un montant de 60 millions de dollars<sup>1</sup>.

L'intérêt actuel pour les ILW réside dans la standardisation du processus d'évaluation qui rend son coût moindre. L'évaluation des pertes d'un secteur est réalisée une seule fois et aboutit généralement à la création d'un indice qui peut être utilisé pour plusieurs titrisations. Ainsi, ce type de titrisation s'avère plus économe, contrairement aux cat-bonds à un mode de déclenchement indemnitaire, où une évaluation particulière est nécessaire pour chaque type de portefeuille titrisé. Les hedge funds et les rétrocessionnaires sont particulièrement friands de ce type de couvertures. La simplification du processus de tarification des ILW les rend plus accessibles à l'ensemble des investisseurs. De plus, la prise en compte des données de tout un secteur, donc d'un grand nombre d'acteurs peut réduire l'incertitude et les marges de risque. Ishaq (2005) constate que les ILW présente un autre avantage pour les entreprises, puisqu'ils lissent les résultats contre les pertes catastrophiques d'un secteur.

### Side-cars

Les side-cars sont des structures financières indépendantes qui permettent aux réassureurs d'augmenter leurs capacités de souscription sans pour autant procéder à une augmentation de capital. En effet lorsque le capital support du risque se trouve dans le side-car, le réassureur peut dynamiser ses fonds propres et augmenter leur rendement.

En pratique, la structuration de l'opération de titrisation est la suivante : des investisseurs souhaitant s'impliquer dans les affaires du cédant réassurent en quote-part jusqu'à une certaine limite un portefeuille entier cédé au side-car. La spécificité de ces couvertures modère le risque de base mais laisse le cédant responsable de ses pertes au delà de la limite du quote-part.

Ces structures ont connu une croissance importante après l'ouragan Katrina en 2005 pour accroître les capacités des réassureurs bermudéens grâce aux capitaux des investisseurs attirés par les potentialités de croissance du secteur et la hausse des prix du marché consécutive à la catastrophe, qui a touché pas moins de 7 états.

### 1.1.3 Avantages et inconvénients

#### Avantages pour les acheteurs de protections (assureurs et réassureurs)

Pour les acheteurs de protection, la titrisation est une innovation en terme de gestion du risque et du capital. Les cédantes ou "sponsors" cherchent une couverture pour leurs risques grâce au capital des investisseurs. Ils transfèrent au marché financiers des risques très rares mais de forte intensité, comme les catastrophes naturelles, et qui concernent des régions à forte densité de richesses (Etats-Unis, Japon et Europe principalement). Les entreprises d'assurances peuvent transférer leurs risques de pointe susceptibles d'impacter leurs fonds propres au bilan. Le capital libéré peut ainsi être affecté à d'autres investissements.

---

<sup>1</sup>cf. McGhee et al. (2007)

Au-delà des couvertures de réassurance traditionnelle, l'entreprise d'assurance peut avoir accès à de nouvelles capacités en utilisant la titrisation. En effet les capacités de l'industrie de l'assurance semblent souvent insuffisantes en regard des besoins en couverture de risque. Aux Etats-Unis, le capital du marché de l'assurance dommage est estimé à 220 milliards USD alors que la capacité des marchés financiers atteint 19,000 milliards USD. Malgré la complexité d'une émission de titre, la standardisation du processus rend de plus en plus accessible ce mode de couverture.

Les agences de notation tiennent compte de la titrisation dans leur surveillance des fonds propres. Il n'y a pas de pas de risque de crédit car la couverture est entièrement collatéralisée. C'est un véritable moyen pour réduire les exigences en capital.

### **Avantages pour les vendeurs de protection (investisseurs)**

L'hypothèse formulée est que le risque porté par les obligations catastrophes n'est généralement pas corrélé aux autres risques que prend l'investisseur sur les marchés en action<sup>1</sup>. Il est ainsi possible pour l'investisseur de diversifier son portefeuille en utilisant des produits de titrisation de risques d'assurance.

La possibilité de spécialiser son investissement peut rendre certains investisseurs particulièrement intéressés par la titrisation. Si les profits d'une entreprise sont corrélés négativement avec les intérêts des assureurs, l'intérêt de l'entreprise est d'acquérir des titres couvrant le risque d'une même catastrophe. Par exemple l'industrie du bâtiment pourrait s'intéresser aux cat-bonds : elle profite des gains de croissance en cas de survenance de catastrophe et finance les sinistres des assureurs via les cat'bonds, ou bien récupère le rendement de ses ILS<sup>2</sup> pour compenser la morosité du marché du bâtiment lorsqu'aucune catastrophe n'a eu lieu.

Cette corrélation inversée entre risque catastrophique et risque de croissance d'un secteur d'activité permet alors aux investisseurs de protéger leur activité et de lisser leurs bénéfices sur plusieurs exercices. Un autre avantage pour l'investisseur est qu'il n'a pas de risque de contrepartie vis à vis du sponsor. La société ad-hoc créée pour émettre les bonds est indépendante juridiquement et financièrement du sponsor qui lui a transféré les risques.

Enfin, les marges réalisées sur ce marché des obligations catastrophe sont plus que correctes. Même si les marges tendent à diminuer du fait de l'arrivée de plus en plus d'acteurs sur ce marché, les cat bond sont très prisés des fonds dédiés, des money manager et des hedge fund.

### **Inconvénients**

Pour les investisseurs, l'hypothèse de non corrélation des risques d'assurances et des marchés financiers semble excessive en pratique. On peut se demander, en effet, si la survenance d'une catastrophe d'une intensité exceptionnelle, qui affecterait dramatiquement les assureurs, serait sans

---

<sup>1</sup>hypothèse de faible corrélation a été confirmée par certains professionnels lors de la conférence PRMIA du 23 janvier 2008.

<sup>2</sup>insurance linked securities.

effet sur les marchés financiers<sup>1</sup>.

Pour les cédantes, il existe un risque de base (présenté par exemple dans Gorvett (1999)) important lorsqu'ils achètent de la protection via les obligations catastrophes. Les contrats de réassurance sont presque toujours basés sur les pertes effectives dues au sinistre. Le réassureur paie une indemnité correspondant à la sinistralité du portefeuille de l'assureur. En revanche les obligations catastrophes ont généralement un seuil de déclenchement qui repose sur un indice ou un modèle paramétrique. Le payoff peut donc être différent des pertes réelles de l'assureur.

Cette différence entre la réalité de l'impact du sinistre sur l'assureur et son estimation au travers d'un indice correspond au risque de base. Plus la corrélation est forte entre les pertes du secteur et celles effectives de l'assureur, plus le risque de base est bas (cf. figure 1.3 inspirée de l'étude Sigma - Helfenstein (2006)).

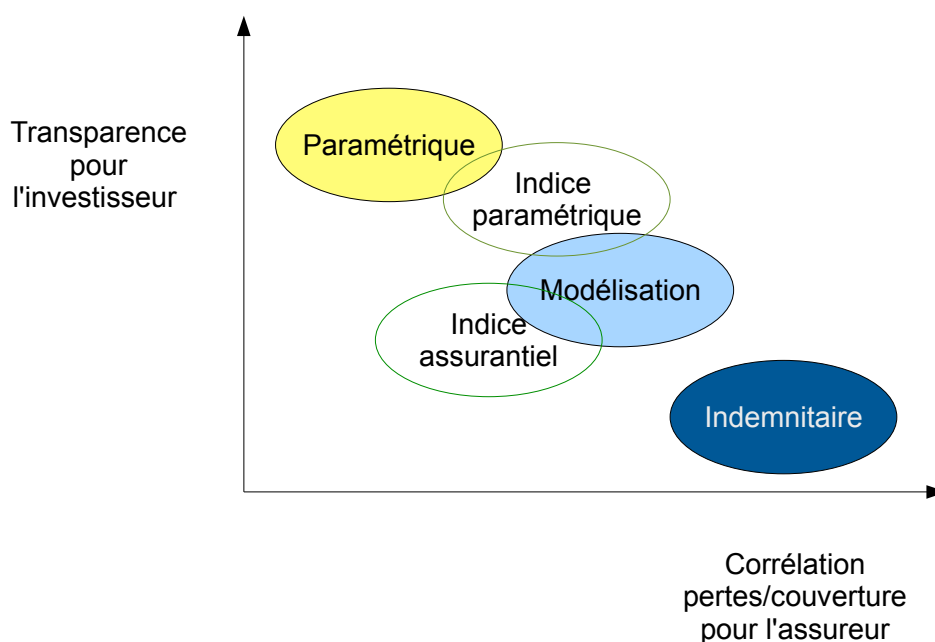


FIG. 1.3 – Types de déclencheurs

L'utilisation d'un seuil de déclenchement indemnitaire entraîne une diminution du risque de base pour l'assureur. En revanche, l'investisseur sera plus réticent à s'engager dans la transaction pour des problèmes d'asymétrie de l'information : aléa moral et anti-sélection. L'anti-sélection traduit la tendance du cédant à profiter de sa meilleure connaissance de son portefeuille pour en titriser les parties les plus risquées et conserver les "bons risques". L'investisseur est souvent limité dans son analyse du risque contenu dans le portefeuille titrisé. De plus, lorsque le cédant a une gestion plus risquée de son portefeuille parce qu'il sait que le risque a été transféré aux investisseurs, il s'agit du phénomène d'aléa moral. Dans ce cas les pertes futures risquent d'être exagérées du fait des

<sup>1</sup>En fait, les catastrophes naturelles du type séisme, ouragan ont peu d'effet sur l'économie au niveau mondial, donc une incidence sur les marchés financiers. Cependant pour des catastrophes de type mortalité comme une épidémie de SRAS ou de grippe aviaire, on peut logiquement penser que cela va affecter les marchés financiers. En effet, ce genre de catastrophes obligent les gens à rester chez eux, entraînant une forte chute sur l'économie. Ce type de risque est abordé dans la seconde section.

agissements du cédant ou de son “laisser-aller” dans la surveillance du portefeuille.

Ces risques sont bien connus du monde de l’assurance puisque l’assureur y est confronté vis à vis de ses assurés. Canabarro et al. (2000) nous apprend que ces problèmes peuvent être limités de plusieurs manières dans le cadre de titrisations. Le risque d’anti-sélection est réduit lorsque le cédant titre l’ensemble d’un portefeuille et établit des règles de sélection des risques transparentes ; ou qu’il conserve une part du risque donc des pertes.

C’est ce qu’a fait USAA (un assureur spécialisé pour les militaires américains) pour la titrisation Residential Re 98 et 99<sup>1</sup> : l’ensemble de ses activités ont été prise en compte et USAA a conservé 10% du risque. La division en classes de risque, initiée par Mosaic Re en 1998, est également favorable à une meilleure appréciation des risques encourus par les investisseurs. Le risque d’aléa moral qui dépend de la croissance et l’évolution du portefeuille peut être réduit avec des périodes contractuelles plus courtes, des seuils de déclenchement périodiques ou des contrats indexés sur le ratio combiné. Enfin, Canabarro et al. (2000) souligne le rôle des agences de notation dans la transmission de l’information ainsi que celui des cabinets spécialisés dans le montage de telles transactions.

#### 1.1.4 Exemples de titrisations

##### Exemple d’une titrisation non-catastrophique en assurance non-vie

L’émission de titres par AXA France IARD en novembre 2005 avait pour but de couvrir le portefeuille français d’assurance automobile pour les particuliers. Ce portefeuille couvrait en 2005, 2,9 millions de contrats pour 1,1 milliards d’euros de primes. A la différence des catastrophes naturelles, les risques automobiles sont caractérisés par une fréquence élevée et une faible volatilité. Le déclenchement de l’indemnisation s’effectue lorsque le ratio de sinistralité a dévié au-delà d’un certain seuil défini chaque année par AXA en concertation avec les agences de notations.

La figure 1.4 détaille la structuration de la titrisation. Le portefeuille assurance automobile est couvert par un traité de réassurance proportionnelle auprès du réassureur Nexgen Re pour 4 ans dans la limite de 85% des primes.

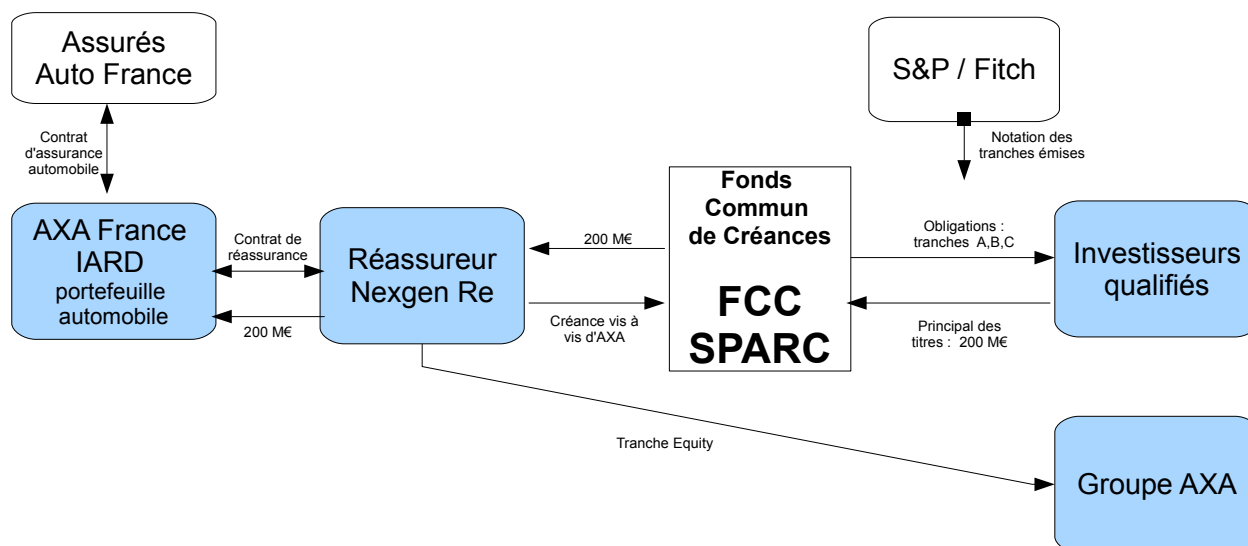
Le réassureur constitue un dépôt de 200 millions d’euros et cède la créance de restitution de ce dépôt à un Fonds Commun de Créance (le SPV) qui émet trois tranches d’obligations. Une quatrième tranche (voir tableau 1.2), dite “Equity” est souscrite pour 33,7 millions d’euros (1ère année) par le groupe AXA pour les premières déviations de sinistralité.

Tranches	Equity	C	B	A
Montant (millions EUR)	33,7	27	67,3	105,7
Rating (S&P /Fitch)	non noté	BBB/BBB-	A/A	AAA/AAA

TAB. 1.2 – Structure des tranches

Avec cette première titrisation d’un portefeuille d’assurance automobile, AXA fait figure de

<sup>1</sup>plus de détails page 8 de Charpentier (2002).

FIG. 1.4 – Structuration et caractéristiques des obligations<sup>1</sup>

précurseur en la matière. Une deuxième opération a été lancée en 2007 pour titriser un portefeuille européen (Allemagne, Belgique, Espagne, Italie) d'assurance automobile représentant plus de 6 millions de contrats et 2,6 milliards d'euros de primes en 2006. Quatre tranches d'obligations ont été émises pour 450 millions d'euros.

### Exemple d'un cat bond

Le cat bond 'pylon' est intéressant pour plusieurs raisons : il s'agit de la première émission de ce type d'obligations en euros, il est émis pour une entreprise européenne, EDF<sup>2</sup>, pour couvrir des risques concernant le transport et la distribution d'électricité en France.

La transaction a été organisée en 2003 conjointement par CDC<sup>3</sup> IXIS et Swiss Re qui ont transféré le risque au fond commun de créance Pylon Ltd. (cf. figure 1.5), structure juridiquement indépendante implantée aux Iles Cayman. Le SPV a émis pour 190 millions d'euros de cat en dans deux tranches de classe A et B sur les marchés financiers avec une maturité de 5 ans (entre le 16/12/2003 et le 14/12/2008).

La transaction a pour but de couvrir les dommages provoqués par les tempêtes aux installations d'EDF. Après les dégâts provoqués en 1999 par les tempêtes Lothar et Martin en Europe, notamment sur les lignes électriques, EDF avait supporté d'énormes coûts de réparation atteignant près de 800 millions d'euros. C'est à travers l'émission de Cat bonds et le transfert de son risque aux marchés financiers que l'entreprise française a choisi de se couvrir contre l'éventualité de tempêtes futures de même ampleur ou d'ampleur supérieure.

<sup>1</sup> lors de la tritrisation du portefeuille automobile d'AXA IARD France, cf. *Axa lance la première titrisation d'un portefeuille d'assurance automobile* (2005).

<sup>2</sup> Electricité De France.

<sup>3</sup> Caisses des Dépôts et des Consignations.

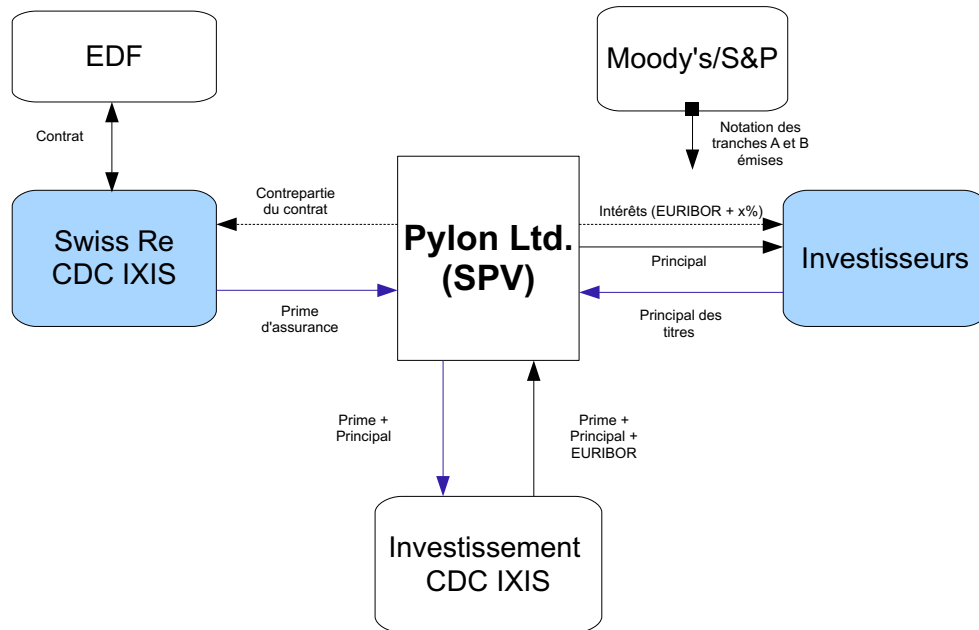
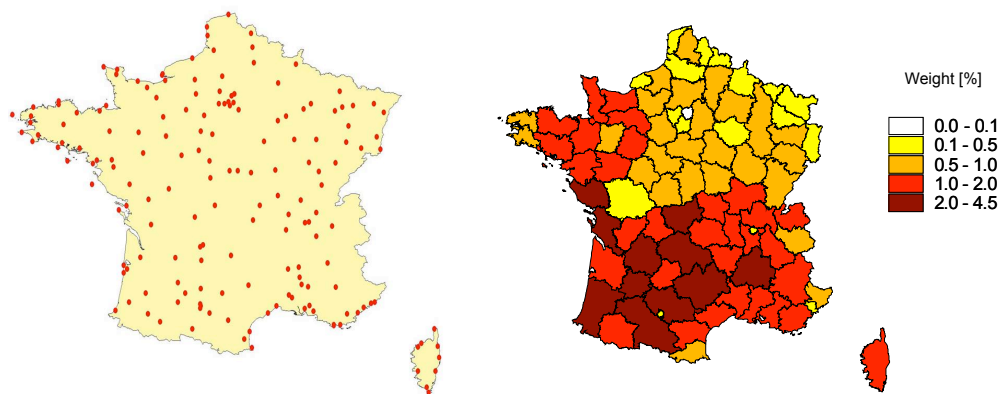


FIG. 1.5 – Titrisation du risque tempête pour EDF

Le déclenchement de l'indemnisation est basé sur un indice de type paramétrique réalisé par RMS (Risk Management Solutions), un groupe spécialisé dans ce type de transactions. Cet indice paramétrique ne correspond pas aux pertes réelles constatées par EDF. Il permet un déclenchement du paiement lorsque les vitesses de vent fournies par Météo France dépassent un seuil prédéfini. L'indice est calculé en fonction des données de vitesse de vent fournies par 150 stations météorologiques réparties sur l'ensemble du territoire français (cf. figure 1.6).

FIG. 1.6 – Stations météo utilisées pour le calcul de l'indice<sup>1</sup>.

Les mesures des pics de rafales de vent sont utilisées pour créer un indice de vitesse de vent maximale qui est ensuite pondéré selon les régions géographiques (sur la base du département en

<sup>1</sup>Carte issue de la présentation du cat bond à "Weather Risk Management Association" : IXIS (2004).

France). IXIS (2004) donne la valeur de l'indice tempête suivante :

$$V = \sum_{i=1}^n w_i * (v_i - 25)^2$$

où  $v_i$  est l'indice de vitesse du vent maximale calculé pour une station et  $w_i$  la pondération affectée à cette station. Cette pondération reflète l'importance plus ou moins grande de l'exposition au vent des installations d'EDF, donc du risque d'impact des dommages provoqués par une tempête éventuelle. Par exemple, le sud-ouest de la France a plus de poids dans l'indice calculé (cf. figure 1.6).

Les investisseurs ont le choix entre deux niveaux de risque lorsqu'ils investissent dans les cat bonds 'pylon'. La tranche B (cf. tableau 1.3) est la plus risquée puisque la perte du capital investi intervient dès le premier instant où le seuil de déclenchement prédéfini est franchi. La perte sera alors plus ou moins importante selon la sévérité de l'événement. Les investisseurs de la tranche A ne sont concernés que lorsque un deuxième événement déclencheur, i.e. une autre tempête de grande intensité, survient avant la maturité des obligations et que le capital de la tranche B est épuisé. Les caractéristiques des tranches sont récapitulées dans le tableau infra.

Tranches	B	A
Montant (millions EUR)	120	70
Rating (Moody's/S&P)	Ba2/BB+	A2/BBB+

TAB. 1.3 – Structure des tranches

Enfin d'autres exemples de titrisations sont listés en annexe B.

## 1.2 Titrisation des risques vie

Bien que plus récente, la titrisation des risques vie est en pleine expansion. Les premières titrisations d'un risque vie ont débuté à la fin des années 90. Elles ont pour but principal de permettre aux (ré)assureurs vie de satisfaire les exigences de capital comme celles imposées par la norme américaine XXX<sup>1</sup>. La compagnie obtient de meilleurs rendements sur fonds propres qu'avec une augmentation de capital, tout en augmentant sa capacité de souscription. Les titrisations vie permettent également de monétiser (rendre liquide) des actifs incorporels et de transférer les risques catastrophe aux marchés financiers.

### 1.2.1 Structure d'émission

La structure d'une titrisation du risque vie (cf. figure 1.7 tiré de Cummins (2004)) est très semblable à celle du risque non vie. L'élément central reste la structure ad-hoc (ou SPV), qui

<sup>1</sup>'Le modèle de règlement Valuation of Life Insurance Policies, plus connu sous le nom de Guideline Triple X, ou XXX [...] impose le préfinancement des engagements futurs liés aux produits d'assurance vie temporaire avec une prime garantie ou nivelée.' Etude Sigma - Helfenstein (2006)

est indépendante juridiquement et financièrement. La conclusion du contrat financier entre le (ré)assureur et une structure ad hoc garantit le paiement d'argent dans le cas où le risque couvert a rempli les conditions de déclenchement. Les investisseurs "dette" achètent des obligations dont le nominal est garanti par un garant de tiers partie et dont les coupons sont la somme d'un taux LIBOR et d'un spread, en l'absence de l'évènement déclencheur. Le taux LIBOR est garanti par le swap de contrepartie, tandis que le spread est financé par la prime fournie par l'assureur. Dans ce modèle, la structure ad-hoc peut aussi émettre en complément des actions pour disposer d'un fond plus important. Les fonds du SPV sont placés dans un compte collatérisé.

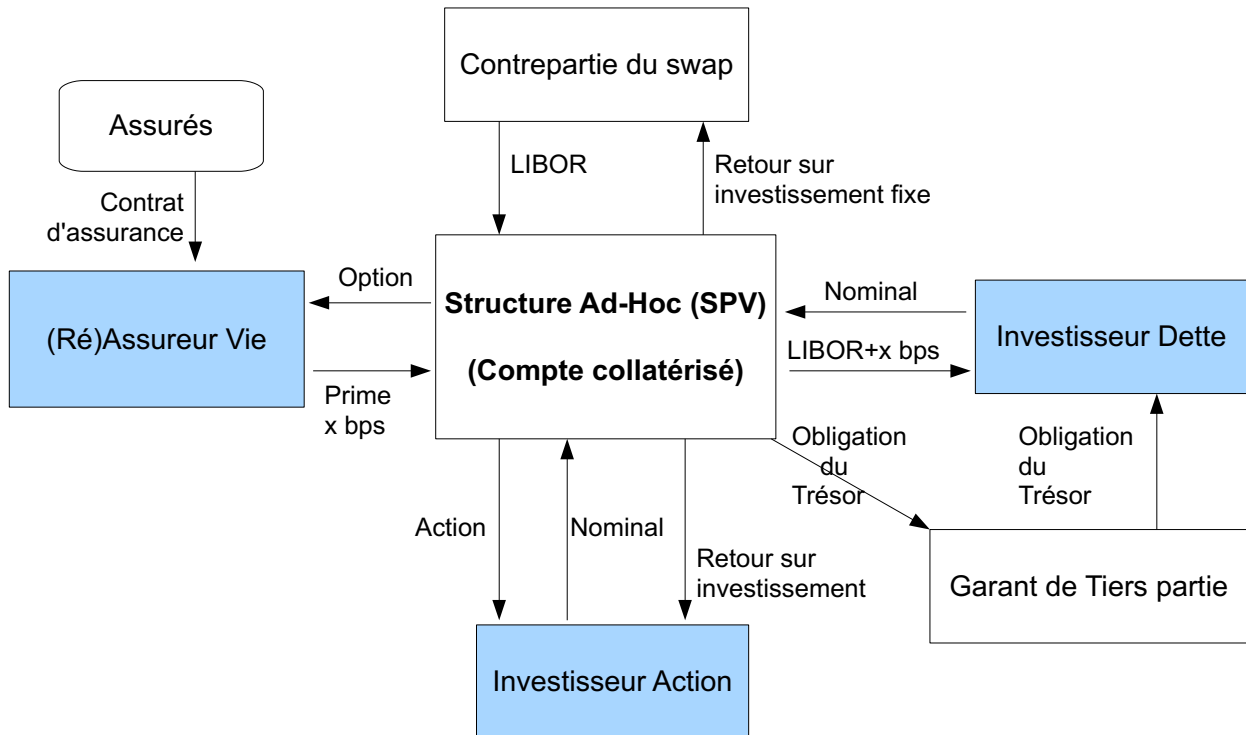


FIG. 1.7 – Structure de titrisation

### 1.2.2 Instruments

Les opérations de titrisations en assurance vie diffèrent de celles en assurance non vie par un point fondamental : elles sont généralement un instrument de financement. Outre la fonction de transférer des risques (de pointe par exemple dans le cas du risque de mortalité), la titrisation est considérée comme un outil de gestion de fonds propres qui permet aux (ré)assureurs de monétiser des actifs incorporels.

Les opérations de titrisations permettent de monétiser les frais d'acquisitions reportés et la valeur actualisée des bénéfices futurs. Cependant, cette anticipation de flux futurs est très contrôlée d'un point de vue comptable et d'un point de vue solvabilité, la titrisation ne permet non plus d'annuler ces besoins en fonds propres.

En particulier sur le marché américain où les exigences du capital réglementaire est très lourde, la titrisation sert à atténuer les pressions dues à ces exigences. En Europe, avec la mise en oeuvre des dispositions Solvabilité II, de nombreuses entreprises font appel aux opérations de titrisation pour alléger les pressions concernant les réserves.

Elles sont donc considérées comme une source de financement. Elles aident l'assureur à résoudre les difficultés de trésorerie associées à la souscription de nouvelles affaires. De plus, elles permettent à la société d'assurance de libérer du capital pour des nouvelles affaires vie aussi bien que pour d'autres objectifs tel qu'une acquisition, un rachat d'actions ou un investissement dans un autre marché.

Les titrisations donnent de la flexibilité à la structure des fonds propres, ce qui peut améliorer leur rendement. Cependant pour être efficaces, les opérations doivent être volumineuses. Pour titrisation en assurance vie, on exige un volume d'au moins 200 millions USD<sup>1</sup>.

Il existe deux grands types de titrisation pour financer les exigences de capital :

– Titrisation de réserve

Actuellement, avec les nouvelles normes comptables, les exigences de fonds propres, de solvabilité des compagnies d'assurances sont de plus en plus strictes. Les petites compagnies ont des difficultés à s'adapter à ces exigences. Cette situation explique le grand nombre de produits de titrisation de réserve sur le marché et particulièrement des produits Triple X/AXXX aux Etats-Unis. Pour aider les sociétés d'assurance à adapter les exigences de capital réglementaire selon les règlements XXX et AXXX, la structure ad-hoc va émettre des obligations de valeur égale aux réserves redondantes (différence entre la réserve obligatoire et ce qui serait économiquement justifié). Les fonds des investisseurs sont conservés dans la structure ad-hoc et servent de garantie pour les obligations et les réserves redondantes.

– Titrisation de la valeur intrinsèque

Dans une titrisation de la valeur intrinsèque, l'émission peut aboutir à un rendement des fonds propres supérieur, car elle permet de bénéficier d'un écart entre le taux payé aux investisseurs et le taux réel remporté par le sous jacent. En outre, une titrisation de la valeur intrinsèque augmente généralement le capital de solvabilité disponible et libère ainsi des ressources financières pour d'autres investissements. Beaucoup de produits de ce types ont été lancés dans les années 2000-2003. Aujourd'hui, sur le marché on connaît les produits Queensgate lancé en 2004 et ALPS en 2005.

### 1.2.3 Avantages et inconvénients

Les avantages et inconvénients des opération de titrisation de risques d'assurance sont explicités dans la partie non-vie. Certains aspects particuliers des titrisations en vie sont détaillés dans cette partie.

---

<sup>1</sup>cf. graphique 3 de l'étude Sigma - Helfenstein (2006).

### **Avantages pour les acheteurs de protection (assureurs et réassureurs)**

Le (ré)assureur vie peut utiliser la structure titrisation pour optimiser son capital ou améliorer sa maîtrise des risques.

Le rendement des fonds propres est amélioré grâce à la monétisation des actifs incorporels et au financement des exigences de capital réglementaire qu'offrent les opérations de titrisation de la valeur intrinsèque et de titrisation de réserve. Le (ré)assureur peut aussi se protéger contre le risque de mortalité extrême grâce aux opérations de titrisation des risques catastrophiques. Par exemple, l'exposition aux pandémies peut être couverte.

La titrisation a également des avantages par rapport à d'autres outils de gestion des réserves requises par le règlements XXX. Le coût de la prime ajouté à celui nécessaire à la mise en place de la structure de titrisation reste inférieur à celui d'une lettre de crédit ou d'un contrat de réassurance traditionnelle. De plus, la capacité de couverture peut atteindre des montants bien supérieurs pour des durées plus longues.

### **Avantages pour les vendeurs de protection (investisseurs)**

Les avantages sont semblables à ceux d'une titrisation non-vie. L'investisseur peut acheter des titres assurantiels pour spécialiser son investissement. Si il considère que les risques des actifs titrisés sont non corrélés aux actifs traditionnels des marchés financiers, cela peut aussi lui permettre de diversifier son portefeuille. Enfin, la société ad-hoc et son compte collatéral permet de limiter le risque de défaut de l'émetteur.

### **Les risques pour les acheteurs de protection (assureurs et réassureurs)**

Le risque réglementaire est important pour les titrisations de réserves qui répondent aux règlements XXX et AXXX puisqu'un changement dans la législation fiscale aurait un impact certain sur la structure de l'opération. Le risque de réputation est également présent : de mauvaises performances des titres seraient sans doute problématiques pour les émissions futures comme l'explique l'étude Sigma - Helfenstein (2006). Les coûts de structure pour les titrisations de la mortalité extrême sont très élevés, de l'ordre de 1 à 2 millions d'euros pour les coûts fixes d'après Alferieff & Le Goff (2007). Le délai de mise en place avant le lancement de l'opération est de 6 mois minimum.

### **Les risques pour les vendeurs de protection (investisseurs)**

La réglementation concernant ces titrisations n'est pas encore stabilisée du fait de leur relative nouveauté. C'est donc un risque pour les investisseurs de voir évoluer les structures de transactions. Certaines émissions sont à taux variable, donc les investisseurs conservent un risque de taux. On peut également s'interroger sur la légitimité de l'hypothèse de non corrélation des risques titrisés et des marchés financiers.

### 1.2.4 Exemples de titrisations

En assurance vie, les produits de titrisation sont divisés en deux types principaux : les produits ayant pour but de financer les exigences de capital et ceux pour transférer les risques. Les deux titrisations explicitées ci-dessous sont utilisées pour transférer le risque de mortalité.

#### Vita Capital I, II et III

En 2003, Swiss Re a lancé le premier produit de titrisation de la mortalité extrême sur le marché avec le capital total de 400 millions dollars. Ce produit est émis sur une tranche unique. Le taux de mortalité est calculé à partir de taux de mortalité des Etats Unis, Angleterre, France, Italie et Suisse. Toutes les obligations sont à notation A+ ou A3. L'objectif visé était de payer Swiss Re dans l'éventualité où un indice prédéfini de mortalité de la population dépasserait 130% son niveau de 2002.

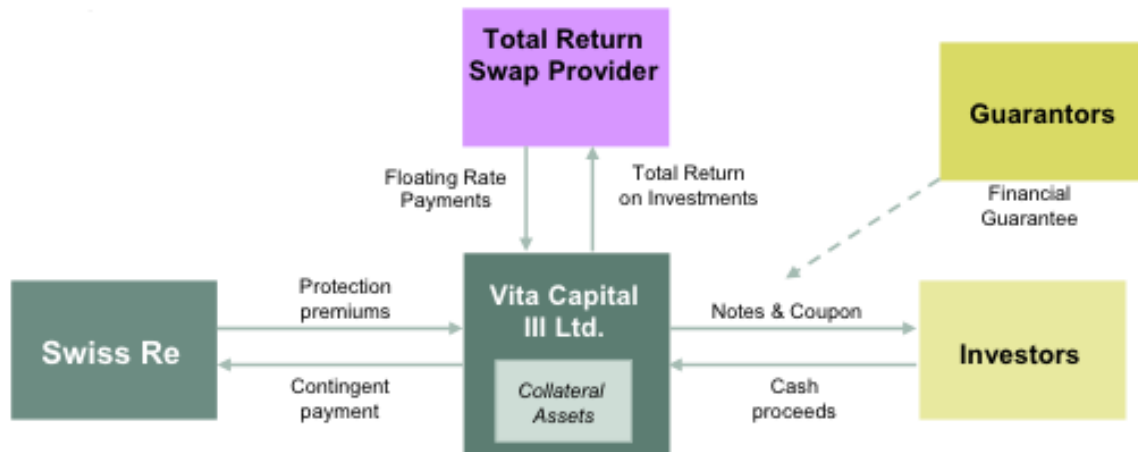
Nom	Vita I	Vita II	Vita III
Année	2004	2005	2006
Capital (Mill. EUR)	400	362	705
Pondération des taux de mortalité	70% Etats-Unis 15% Angleterre 7,5% France 5% Italie 2,5% Suisse	62,5% Etats-Unis 17,5% Angleterre 7,5% Allemagne 7,5% Japon 5% Canada	62,5% Etats-Unis 17,5% Angleterre 7,5% Allemagne 7,5% Japon 5% Canada
Maturité	3 ans	5 ans	5 ans
Déclenchement	150% / 130%	120%/115%/105%	125% /120%

TAB. 1.4 – Emission Vita de Swiss Re

Avec le même objectif que Vita I, le produit Vita II a été lancé en avril 2005 pour un capital total de 362 millions dollars sur 3 tranches : B, C et D. Les tranches sont déclenchées si le taux de mortalité dépasse le seuil de déclenchement pendant deux années consécutives. A noter que les pays servant de base pour le calcul de l'indice ont changé.

Vita III est lancé pour couvrir les risques de mortalité avec un capital total de 705 millions de dollars, divisé en deux tranches A et B. La première tranche intervient au seuil de 125% alors que la deuxième tranche intervient au seuil de 120% de la mortalité attendue pour une quelconque période de deux années consécutives sur 5 ans. Le taux de mortalité est calculé à partir des taux des Etats Unis, Angleterre, Allemagne, Japon et Canada. Les obligations émises sont garanties par des sont garanties par un fond de garantie. Les rendements des investissements sont garantis encore une fois par la technique de collatéralisation.

La structure de la titrisation Vita III est donnée en figure 1.8.

FIG. 1.8 – La structure de la titrisation Vita III<sup>1</sup>

## Osiris Capital

Axa a lancé ce produit en Novembre 2006, avec un capital total de 345 millions d'euros. Ce produit est divisé sur 3 tranches B, C et D. Le taux de mortalité est calculé en utilisant le niveau de mortalité constaté en France 60%, au Japon 25% et aux Etats Unis 15%. Avec ce produit, Axa a titrisé une partie du portefeuille décès. C'est le premier assureur direct à réaliser une opération de titrisation sur un portefeuille de risque mortalité.

Les détails de l'émission sont les suivants :

Tranches	Caractéristiques	Taille	Spread	Notation (S&P/Moody's)	Déclenchement (%indice mortalité)
A	Obligations garantis à taux variables	100 Mill EUR	+20bps	AAA/Aaa	119%/124%
B	Obligations garantis	50 Mill EUR	+120bps	A-/A3	114%/119%
C	à taux variables	150 Mill EUR	+185bps	BBB/Baa2	110%/114%
D	et à risque sur nominal	100 Mill EUR	+500bps	BB+/Ba1	106%/110%

TAB. 1.5 – Emission d'Axa

Le risque est transféré après avoir été réparti en 4 tranches progressives. Le seuil de déclenchement dépend de l'indice de mortalité calculé avec les pondérations par pays sur la moyenne de de deux années consécutives. La tranche D intervient au seuil de 106% de l'indice de mortalité attendue tandis que la tranche A intervient au seuil de 119%.

Les seuils de déclenchement et d'épuisement sont détaillés dans le tableau 1.5 des caractéristiques de l'émission. L'opération est réalisée pour une période de couverture de 4 ans du 1er janvier 2006

<sup>1</sup>source Aigrain (2007).

au 31 décembre 2009. Pour chaque tranche, le capital de l'investisseur évolue de manière proportionnelle entre le seuil de déclenchement et le seuil d'épuisement.

Depuis son lancement, ce produit a connu un très bon accueil de la part des investisseurs. La demande de ce produit a été 5 fois supérieure à l'offre. En terme de répartition géographique, la classe B est placée en Europe alors que les classes C et D sont placées aux Etats Unis. Les investisseurs sur les classes B et C sont plutôt les institutionnels tandis que dans la classe D, on voit le rôle prépondérant des "hedge funds".

La structure de la titrisation Osiris est donnée en figure 1.9.

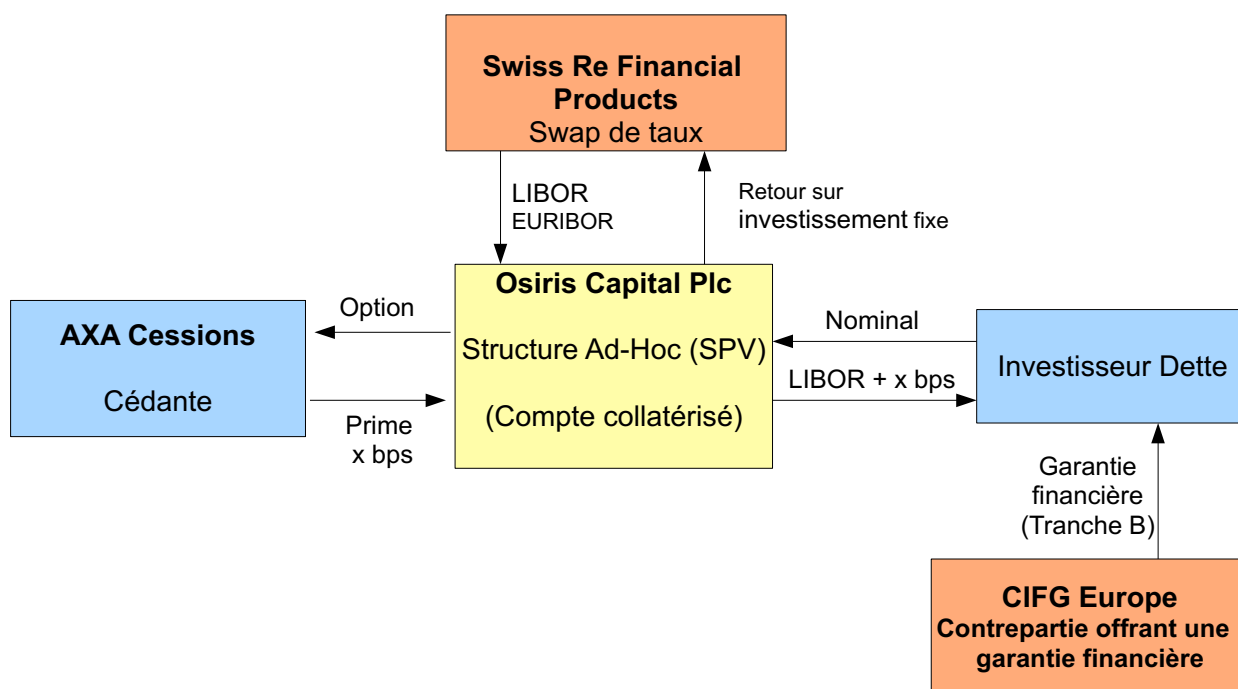


FIG. 1.9 – La structure de la titrisation Osiris<sup>1</sup>

AXA a étudié l'impact de la survenance de scénarios catastrophes par rapport aux seuils de déclenchements de chacune des tranches d'émission, à partir d'événements catastrophiques historiques. Le tableau 1.6 reprend quelques résultats de Ménioux (2008).

Par exemple, pour un titre de la tranche B émis en 1917 seulement 90% du niveau de sévérité de la grippe espagnole de 1918 auraient été nécessaires pour atteindre le seuil de déclenchement et donc engendrer une perte pour l'investisseur. En revanche, pour un titre de la même tranche émis en 1994, l'investisseur aurait subi une perte si le tremblement de terre de Kobé en 1995 avait été 116 fois plus sévère<sup>2</sup>.

Pour ce produit, il reste encore de certaines limites, c'est un coût de structure très élevé (coût fixe minimum de 1 à 2 millions d'euros), un délai de mise en place nécessaire avant le lancement (6

<sup>1</sup>source Alferieff & Le Goff (2007).

<sup>2</sup>pour plus de précisions sur les hypothèses de ces scénarios, se reporter à Ménioux (2008).

Événement historique	Sévérité occasionnant le déclenchement par classe			
	A	B	C	D
Pandémie - Grippe espagnole (1918)	1,22×	0,9×	0,64×	0,39×
SIDA (1995)	64×	47×	33×	20×
Tremblement de terre - Kobé (1995)	157×	116×	83×	50×

TAB. 1.6 – Impact des événements historiques

mois minimum) et une taille critique indispensable (de 200 à 300 millions d’euros minimum). Enfin d’autres exemples de titrisations sont listés en annexe B.

## Chapitre 2

# Panorama des méthodes d'évaluation

Ce chapitre est consacré aux méthodes d'évaluation des produits de titrisation. Plutôt que de lister les méthodes d'évaluation par type de produit, nous présentons les 4 méthodes d'évaluation applicables aux différents produits de titrisation. De manière analogue à l'évaluation du risque de crédit, on peut valoriser les produits de titrisation avec un modèle à intensité ou un modèle structurel. Cependant, il existe deux autres approches pour l'évaluation : une approche à l'aide de transformées de probabilité et une approche à l'aide de fonctions d'utilité.

### 2.1 Modèles à intensité

Les modèles à intensité sont une classe de modèles où le défaut (i.e. le déclenchement du produit de titrisation correspond à un défaut pour l'investisseur) est du à un phénomène endogène (à l'assurance). Dans un premier temps, nous traitons le cat bond. Puis nous étudions le mortality/longevity bond.

#### 2.1.1 Application aux “cat bond”

L'article fondateur de ce modèle est Baryshnikov et al. (2001), où l'on présente un processus de Poisson doublement stochastique (parfois appelé processus de Cox dans la littérature). Des applications numériques de ce modèle se trouvent dans Kukla & Burnecki (2003) (application aux risques météorologiques américains<sup>1</sup>), Cabrera & Hardle (2007) (application aux séismes mexicains) et Burnecki et al. (2004).

L'approche de Baryshnikov et al. (2001) consiste tout d'abord à valoriser un “treshold bond” ou obligation à seuil de déclenchement. Puis les auteurs expriment le “cat bond” en fonction du “treshold bond”. Dans un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  muni d'une filtration  $\mathcal{F}_t$ , on caractérise un “treshold bond” de maturité  $T$  par

- un processus de Poisson doublement stochastique  $(N_t)_t$  d'intensité (stochastique)  $(\lambda_t)_t$  représentant le processus d'arrivée des catastrophes. Une façon de caractériser ce processus de

---

<sup>1</sup>utilisation de l'indice PCS : Property Claim Service.

Poisson doublement stochastique est de le définir par sa fonction caractéristique (cf. annexe C). Le processus d'intensité  $\lambda$  est supposé positif et  $\mathcal{F}_t$ -adapté. On peut définir le temps d'arrêt  $\tau$  comme l'instant du premier saut  $\tau = \inf(t > 0, N_t = 1)$  ;

- un processus de taux d'intérêt  $(r_t)_t$  définissant le prix d'un zéro coupon unitaire de maturité  $t$  en  $s < t$  par  $e^{-\int_s^t r(u)du}$  ;
- un processus de flux  $(C_t)_t$  mesurable payé en  $\tau$  (l'instant de "catastrophe").

Ensuite, pour valoriser ce produit, les auteurs font l'hypothèse d'existence d'un marché (secondaire) pour les "cat bond" dans lequel il y a absence d'opportunité d'arbitrage (AOA). Sous cette hypothèse, le prix d'un "treshold bond" est donné par

$$V_t = \mathbb{E} \left[ \int_t^T e^{-R(t,u)} C_u \lambda_u du \middle/ \mathcal{F}_t \right], \quad (2.1)$$

où le processus d'actualisation  $R$  est défini par  $R(t, u) = \int_t^u r(s)ds$ . Malgré l'AOA et l'hypothèse d'existence d'un marché pour ce produit, les auteurs utilisent la probabilité historique. Ils expliquent le choix de la probabilité historique par le fait que le processus  $(N_t)_t$  représentant les instants de catastrophe est indépendant des marchés financiers et quantifiable de manière scientifique.

Pour modéliser les catastrophes naturelles, différentes approches scientifiques sont possibles. Un extrême est de modéliser entièrement la catastrophe naturelle étudiée, mais c'est en général impossible tellement les catastrophes naturelles sont complexes. A l'autre extrême, une approche statistique purement historique pourrait être utilisée. Par exemple, l'indice PCS remonte jusqu'en 1954, ainsi on dispose potentiellement d'une large base de données. Cependant (le problème d'inflation mise à part), la situation des assurés a tellement changé tant au niveau des contrats qu'au niveau de la qualité de la construction assurée et de l'urbanisation des zones à risque, qu'une approche purement statistique semble peu efficace. Tous les approches intermédiaires sont listées dans le tableau 4 de Canabarro et al. (2000).

Ensuite, Baryshnikov et al. (2001) applique cette approche au "cat bond" en explicitant le processus  $(N_t)_t$  d'un "treshold bond"<sup>1</sup>. Le processus  $(N_t)_t$  est défini par

- $N_t = \mathbb{1}_{\{L_t \geq D\}}$  où  $D$  est le seuil (déterministe) de déclenchement du "cat bond" et  $L_t$  la perte agrégée au temps  $t$  ;
- $L_t$  la perte agrégée définie comme un processus de Poisson composé (i.e.  $L_t = \left( \sum_{i=1}^{M_t} X_i \right) \mathbb{1}_{\{M_t > 0\}}$  où les sinistres  $X_i$  sont iid de fonction de répartition  $F$  et  $M_t$  un processus de Poisson indépendant des sinistres d'intensité  $m_t$ ).

Typiquement ce processus de pertes cumulées peut être calibré sur l'un indice américain PCS (Property Claim Service).

Baryshnikov et al. (2001) montre que l'intensité  $\lambda$  du processus  $N_t$  est donnée par

$$\lambda_t = m_t \bar{F}(D - L_t) \mathbb{1}_{\{L_t < D\}},$$

où  $\bar{F}$  désigne la fonction de survie. Ainsi, l'équation 2.1 devient

$$V_t = \mathbb{E} \left[ \int_t^T e^{-R(t,u)} C_u m_u \bar{F}(D - L_u) \mathbb{1}_{\{L_u < D\}} du \middle/ \mathcal{F}_t \right]. \quad (2.2)$$

---

<sup>1</sup>En fait, les deux autres processus caractéristiques d'un "treshold bond" (i.e.  $(r_t)_t$  et  $(C_t)_t$ ) sont "spécifiques" à chaque "cat bond".

Pour obtenir les “cat bond” avec et sans coupons, il faut adapter 2.2 au flux que l’on souhaite. Les applications numériques réalisées dans Kukla & Burnecki (2003), Burnecki et al. (2004) et Cabrera & Hardle (2007) montrent que le prix du cat bond avec ou sans coupon augmente avec le seuil  $D$ . Cependant la maturité  $T$  diminue ou augmente le prix suivant s’il y a ou non des coupons.

Un exemple de processus d’intensité a été présenté dans Jang & Dassios (2003). Ils choisissent comme processus  $(\lambda_t)_t$  un bruit inhomogène (“shot noise” en anglais) défini de la manière suivante

$$\lambda_t = \lambda_0 e^{-\delta t} + \sum_{i=1}^{M_t} Y_i e^{-\delta(t-t_i)}, \quad (2.3)$$

où  $(M_t)_t$  est un processus de Poisson (homogène) d’intensité  $\rho$ . C’est un processus qui saute (avec des temps d’inter occurrence de loi exponentielle) puis décroît de manière exponentielle. Contrairement à Burnecki et al. (2004), Jang & Dassios (2003) évalue le cat-bond sous la probabilité risque neutre. Comme cette dernière n’est pas utile (à cause de l’incomplétude du marché), ils en choisissent une à l’aide de la transformée d’Esscher pour arriver à une équation aux dérivées partielles. Lorsque les montants des sinistres  $(X_i)$  sont de loi gamma et les processus d’impact  $(Y_i)$  dans l’équation (2.3) sont de loi exponentielle, Ils fournissent une formule fermée pour l’équation (2.2).

Enfin Albrecher et al. (2004) présente une évaluation avec des méthodes quasi Monte Carlo du modèle à intensité. Là encore, on choisit la probabilité historique pour calculer (2.2). Certes les méthodes de quasi Monte Carlo sont largement meilleurs en convergence qu’une méthode de Monte Carlo naïve, mais le choix de la probabilité historique reste peu justifiable.

### 2.1.2 Applications aux “mortality” ou “longevity bond”

Cairns et al. (2006a) analyse l’évaluation des titres liés au risque de mortalité (et longévité) dont l’exemple le plus connu sont les mortality bond. Cependant, Cairns et al. (2006a) traite de plein d’autres titres comme les longevity bond, les survivor swaps,... Après avoir souligné que la mortalité n’est pas déterministe, il énonce quelles caractéristiques un modèle à mortalité stochastique doit avoir :

- le modèle impose une force de mortalité positive,
- le modèle doit être cohérent avec les données,
- les dynamiques long terme doivent être biologiquement raisonnables,
- les anticipations de mortalité future doivent être de la forme d’une diversion par rapport à une “moyenne” ou tendance.

Le lien entre la force de mortalité  $\mu$  et la fonction de survie  $S$  est le suivant :

$$S(u, x) = e^{-\int_0^u \mu(t, x+t) dt},$$

où la force de mortalité  $\mu$  peut s’interpréter comme la probabilité de décéder sur un court intervalle de temps et  $S$  désigne la probabilité de survie jusqu’au temps  $u$  pour individu d’âge  $x$  en 0.

Dans notre modèle, ces quantités sont donc aléatoires, ainsi la probabilité de survie observée n’est que la réalisation de la variable  $S$ . On pose  $\mathbb{P}(0, u, x) = E_{\mathbb{P}}[S(u, x)]$ . Au temps  $t$  la probabilité de survie jusqu’en  $u$  d’un individu d’âge  $x$  en 0 sachant qu’il est vivant en  $t$  est donnée par

$$\mathbb{P}(t, u, x) = E_{\mathbb{P}} \left[ \frac{S(u, x)}{S(t, x)} \middle/ \mathcal{F}_t \right].$$

Cependant dans une perspective d'évaluation, on ne peut utiliser la probabilité historique  $\mathbb{P}$ . En effet, pour avoir l'absence d'opportunités d'arbitrage sur les dérivés de mortalité, il ne faut qu'on incorpore une prime de risque pour le risque spécifique (diversifiable). On note  $\mathbb{Q}$  la probabilité risque neutre. Mais l'incomplétude du marché entraîne que la probabilité risque neutre<sup>1</sup>  $\mathbb{Q}$  n'est pas unique. Cairns et al. (2006a) utilise la probabilité risque neutre pour rester cohérent avec la théorie des mathématiques financières.

Ainsi, les quantités  $\mathbb{P}(t, u, x)$  et  $\mathbb{P}(0, u, x)$  ont les équivalents suivants sous la probabilité risque neutre :

$$\mathbb{Q}(0, u, x) = E_{\mathbb{Q}}[S(u, x)] \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}(t, u, x) = E_{\mathbb{Q}} \left[ \frac{S(u, x)}{S(t, x)} \middle/ \mathcal{F}_t \right].$$

Cairns et al. (2006b) présente et développe tout un tas de modèles pour modéliser le taux de mortalité stochastique  $\mu$ . On peut les lister en quatre catégories :

- les modèles de taux courts dont les modèles à taux court équivalents pour les intérêts sont le modèle de Vasicek (1977) et le modèle de Cox, Ingersoll & Ross (1985),
- les modèles de mortalité “forward”, dont l'équivalent pour les taux d'intérêts est le modèle de Heath et al. (1992),
- les modèles à mortalité positive, cf. Flesaker & Hughston (1996) pour une application aux taux d'intérêts,
- les modèles sur les rentes viagères à terme correspondants aux modèles de swap l'équivalent taux d'intérêts (Brace et al. (1997)).

Dans la suite, nous allons seulement présenter les modèles à taux courts.

Les modèles à taux court peuvent se mettre sous la forme

$$d\mu(t, x) = a(t, x)dt + {}^t b(t, x)dW(t),$$

où  $a$  et  $b$  sont des processus vectoriels prévisibles et  $W$  est un mouvement brownien vectoriel. Ce modèle inclut le modèle de Lee & Carter (1992) et le modèle affine de Dahl (2004). A partir de cette dynamique, la probabilité de survie risque neutre est

$$\mathbb{Q}(t, T, x) = E_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T \mu(u, x+u)du} \middle/ \mathcal{F}_t \right].$$

Une formule fermée existe pour le modèle de Dahl (2004) dans lequel  $a$  et  $b$  sont univariés et respectent certaines contraintes.

## 2.2 Modèles structurels

A la différence des modèles à intensité, les modèles structurel explique le défaut (i.e. le déclenchement de l'ILS<sup>2</sup>) comme un problème structurel de l'agent émetteur (ici une compagnie d'assurance ou réassurance). Les modèles structurels sont appliqués essentiellement aux cat bond dans la littérature actuelle.

<sup>1</sup>En marché incomplet, le terme risque neutre s'interprète comme le fait que les rendements moyens à court terme sous  $\mathbb{Q}$  sont égaux aux taux d'intérêts sans risque (à court terme), cf. Cairns et al. (2006b).

<sup>2</sup>Insurance Linked Security.

### 2.2.1 Modèle en temps discret

Le modèle structurel de Cox & Pedersen (2000) est un modèle en temps discret prenant en compte l'incomplétude (la complétude garantissant normalement l'unicité de la probabilité risque neutre) du marché pour évaluer les "cat bond". En séparant leur probabilité d'évaluation en une partie financière et une partie spécifique aux catastrophes naturelles, les auteurs mettent en évidence que le choix d'une probabilité risque neutre est équivalente à choisir une structure de taux d'intérêts.

De plus, ils montrent que la probabilité risque neutre n'affecte que la composante financière de la probabilité globale, quand l'indépendance est faite entre la partie financière et la partie "catastrophe". Dans ce modèle (en temps discret), il dérive une formule (cf. équation (5.18) de Cox & Pedersen (2000)) du cat bond dépendant de la catastrophe sous-jacente (pondéré avec la probabilité historique) et d'une structure de taux d'intérêt (évalué sous la probabilité risque neutre des "marchés"). Pour plus de détails sur le modèle en temps discret, se reporter à Cox & Pedersen (2000) et Charpentier (2002) pour une application numérique.

### 2.2.2 Modèle en temps continu

Le modèle de Lee & Yu (2002) étend le modèle précédent en temps continu. On modélise les actifs de l'assureur  $A_t$ <sup>1</sup> et les pertes liées à la catastrophe  $C_t$  pendant la durée d'un cat bond. Ainsi, on peut prendre en compte le risque de défaut de l'assureur.

De plus, on peut traiter l'aléa moral de l'émetteur de cat bond. En effet, si l'on prend en compte l'aléa moral, les pertes  $C_t$  de l'assureur servent directement pour déclencher le cat bon au delà d'un seuil ( $K$ ). Comme l'assureur a tout intérêt à verser des prestations d'assurance généreuses lorsque  $C_t$  est proche du seuil, on a donc un aléa moral sous-jacent. Pour contourner ce problème, il faut donc ne plus utiliser  $C_t$  directement mais un indice  $C_{index,t}$ . Cependant en procédant ainsi, on introduit le risque que  $C_t$  soit différent de  $C_{index,t}$ , i.e. le risque de base. Cummins et al. (2002) détaille le risque de base pour les cat bond, et souligne que le risque de base (pertes de l'assureur  $C_t$  sont différentes de celle de l'indice  $C_{index,t}$ ) est très fort pour les assureurs de petites tailles.

Spécifions les caractéristiques du modèle de Lee & Yu (2002), tout d'abord le processus des actifs de l'assureurs  $(A_t)_t$  a pour dynamique :

$$\frac{dA_t}{A_t} = \mu_A dt + \phi dr_t + \sigma_A dW_{A,t} \quad \text{sous } \mathbb{P} \quad (2.4)$$

$$\frac{dA_t}{A_t} = r_t dt + \phi \nu \sqrt{r_t} dZ_t^* + \sigma_A dW_{A,t}^* \quad \text{sous } \mathbb{Q}, \quad (2.5)$$

et le processus de taux d'intérêts stochastiques  $(r_t)_t$  est donné par un processus de Cox, Ross et Ingersoll<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} dr_t &= \kappa(m - r_t)dt + \nu \sqrt{r_t} dZ_t \quad \text{sous } \mathbb{P} \\ dr_t &= \kappa^*(m^* - r_t)dt + \nu \sqrt{r_t} dZ_t^* \quad \text{sous } \mathbb{Q}, \end{aligned}$$

<sup>1</sup>On s'intéresse aux actifs de l'assureur émetteur du cat bond. Même si généralement l'émission de cat bond a lieu au travers du SPV, on peut appliquer ce modèle en changeant les valeurs des paramètres du modèle.

<sup>2</sup>cf. Cox et al. (1985).

où  $W$  et  $Z$  (respectivement  $W^*$  et  $Z^*$ ) sont des mouvements browniens indépendants. Le processus des sinistres  $(C_t)_t$  ainsi que l'indice  $(C_{index,t})_t$  quant à eux suivent des processus de Poisson composé :

$$C_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i \quad \text{et} \quad C_{index,t} = \sum_{i=1}^{N_t} X_{index,i}.$$

L'indépendance entre le(s) processus des sinistres et la dynamique des actifs est justifié par le fait que l'on garde la complétude du marché (et donc l'unicité de la probabilité risque neutre) en n'intégrant pas un processus à saut (celui des sinistres) directement dans la dynamique des actifs. Cette hypothèse est partiellement justifiable si l'on admet que les sinistres ne représentent pas un risque systémique sur les marchés financiers (et donc sont diversifiables). Par conséquent, il n'est pas nécessaire selon cette hypothèse de prévoir une prime de risque (inclus implicitement dans une probabilité risque neutre) pour ce risque.

Dans ce cadre, les flux d'un cat bond pour l'investisseur sont donc

$$P(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } C_{index,T} \leq K \text{ et } C_T \leq A_T - aL_T \\ p & \text{si } K < C_{index,T} \text{ et } C_{index,T} < A_T - aL_T \\ \frac{(A_T - C_T)_+}{aL_T} & \text{sinon} \end{cases}$$

On rappelle que  $K$  désigne le seuil de déclenchement où  $L_T$  désigne le passif de l'assureur,  $a$  la proportion du montant de cat bond émis dans le passif  $L_t$  et  $p$ , la proportion garantie (éventuelle) aux investisseurs.

Ensuite le prix en  $t$  est tout simplement l'espérance actualisé de ce flux  $P(T)$  :

$$P(t) = E_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\int_t^T r_s ds} P(T) \right]. \quad (2.6)$$

Enfin, l'aléa moral de l'émetteur peut être pris en compte en changeant (localement) le processus de pertes lorsque  $C_t$  est proche du seuil de déclenchement  $K$ , i.e. charger la moyenne des sinistres lorsque  $C_t$  se situe dans un intervalle de longueur  $\alpha$  autour de  $K$ .

L'évaluation de l'espérance (2.6) est réalisée par une méthode de Monte-Carlo. Albrecher et al. (2003) améliore ce procédé avec les méthodes de quasi Monte Carlo. Il est évident que ces méthodes utilisant non plus des générateurs pseudo aléatoire mais des suites de discrédance faible<sup>1</sup> améliore grandement le temps de calcul des méthodes de Monte Carlo "naives".

## 2.3 Evaluation à l'aide de transformées de probabilités

Comme très souvent les tranches des montants titrisés sont exprimés par des spread (i.e. différentiel de rendement entre le taux de coupon du cat bond et le taux sans risque (e.g. le LIBOR)), différents articles abordent le problème d'évaluation en cherchant à trouver ce spread. Une approche traditionnelle moyenne/variance sur les flux a été développée par Canabarro et al. (2000)<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>suites quasi-aléatoires.

<sup>2</sup>cf. page 14-15 de Canabarro et al. (2000).

Cependant, du fait que les rendements des produits cat (vie ou non vie) sont très asymétriques et comportent des sauts<sup>1</sup>, le cadre de rendements gaussiens dans lequel a été introduit le ratio de Sharpe (i.e. MEDAF : CAPM en anglais) est peu approprié pour les produits cat. Cette caractéristique nous a été “confirmée” lors de la conférence PRMIA (du 23 janvier 2008 organisée par Natixis).

Avec cette idée de dissymétrie, Wang (1996) a eu l'idée de chercher à transformer les probabilités dans un contexte de principe de primes. Il propose une classe de transformée de probabilités telle que

$$g : S(x) \mapsto g(S(x)) = S^*(x),$$

i.e. une classe de fonctions transformant de la fonction de survie pour la variable aléatoire de perte. Pour rester cohérent avec le fait que l'on manipule des probabilités,  $g$  doit vérifier :

- $g(0) = 0$ ,
- $g$  est une fonction strictement croissante,
- $g(1) = 1$ ,

Une dernière contrainte peut ajoutée dans le cas d'un principe de prime est la concavité<sup>2</sup>. Enfin différentes fonctions  $g$  sont présentées dans Wang (1996) (e.g. exponentielle, quadratique, logarithme) qui permettent de retrouver des principes de prime connus.

Wang (2000) choisit un type de fonction  $g$  très particulière :

$$g(x) = \Phi(\Phi^{-1}(x) + \lambda),$$

qui respecte toutes les propriétés supra. Enfin Wang (2001) and Wang (2002) proposent une approche unifiée pour évaluer des produits financiers et assuranciers, qui incorpore le modèle de Black & Scholes. De plus,  $\lambda$  s'interprète comme la prime de risque. Cependant, seul Wang (2004) traite des cat bond. A noter qu'à chaque transformée de Wang  $g$ , on peut associer une mesure de risque  $\rho_g(X) = \int_0^{+\infty} g(S_X(t))dt$ , qui est un principe de prime si  $g$  est concave.

La section se divise comme suit : une application de la transformée de Wang pour les cat bond, une application au risque de mortalité et une application au risque de longévité.

### 2.3.1 Application aux cat bond

Wang (2004) propose une approche pour évaluer les cat bond par des spread à l'aide de transformée de probabilités. Il introduit deux transformées de probabilités :

- la transformée de Wang à 1 paramètre associée à une fonction de répartition  $F$  la fonction de répartition  $F^*(x) = W_\lambda(F)(x) = \Phi(\Phi^{-1}(F(x)) + \lambda)$ ,
- la transformée de Wang à deux paramètres est définie par  $F^*(x) = W_{\lambda,k}(F)(x) = F_{St_k}(\Phi^{-1}(F(x)) + \lambda)$  où  $F_{St_k}$  désigne la fonction de répartition de la loi de Student à  $k$  degrés de liberté.

Wang (2004) montre que pour des variables aléatoires ( $X$ ) normale et lognormale, le coefficient  $\lambda$  de la transformée de Wang est le ratio de Sharpe<sup>3</sup> pour passer de la probabilité risque historique à la probabilité risque neutre dans le modèle de Black & Scholes.

<sup>1</sup>la plus grosse partie de la masse de probabilité est autour, mais il y a une faible probabilité d'avoir de larges pertes.

<sup>2</sup>cf. page 77 de Wang (1996).

<sup>3</sup>i.e.  $\lambda = \frac{E[X] - r_f}{\sqrt{Var[X]}}$  où  $r_f$  désigne le taux sans risque.

Les deux transformées supra sont illustrées sur une loi uniforme  $\mathcal{U}(0, 100)$  dans Wang (2004). La transformée de Wang (à un paramètre) accentue le poids sur les fortes valeurs et le diminue sur les faibles valeurs (cf. figure 2 de Wang (2004)). La transformée de Student quant à elle accentue le poids sur les extrêmes (cf. figure 3 de Wang (2004)). Selon Wang, la transformée de Student représente mieux l'aversion au risque des investisseurs. Wang (2004) calibre la transformée de Student sur 16 transaction de cat bond en 1999 en minimisant l'erreur quadratique moyenne i.e.

$$\min_{k,\lambda} \left( \sum_i (y_i - E^*[X_i] + r_i)^2 \right),$$

où  $E^*[X_i] - r_i$  est le spread théorique calculé avec la transformée  $W_{\lambda,k}$  et  $y_i$  le spread empirique. L'ajustement aux données de Lane (2000) semble assez bon même si un test statistique serait fort apprécié pour conclure sur la qualité de l'ajustement.

### 2.3.2 Application au risque de mortalité

Lin & Cox (2006) utilise une méthode très similaire pour évaluer les produits de titrisation. Un produit sur le risque de mortalité est basé sur un indice de mortalité  $q_t$  pour l'année  $t$  calculé sur différents pays (européens par exemple dans le cas de l'émission de Swiss Re). Toute surmortalité (due par exemple à une épidémie de SRAS, une grippe aviaire humanoïde,...) est reflété dans l'indice  $q_t$  par un saut. Dans le cas de l'émission de Swiss Re, on considère qu'il y a surmortalité si  $q_t$  dépasse de 30% son niveau de départ. Lin & Cox (2006) procède en deux temps une modélisation de l'indice de mortalité et un "ajustement" de mortalité sur les marchés financiers à l'aide de la transformée de Wang (à deux paramètres).

Lin & Cox (2006) modélise son indice de mortalité à l'aide d'un mouvement brownien géométrique et d'un processus à saut log normal. Plus précisément, on a

$$q_{t+h} = q_t e^{(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})h + \sigma W_h} Y_{N_{t+h} - N_t},$$

où  $W$  est un mouvement brownien standard,  $\alpha, \sigma^2$  la volatilité et la tendance de la composante brownienne,  $Y$  l'amplitude des sauts et  $(N_t)_t$  le processus d'arrivée des sauts. Les sauts sont tels qu'en absence de saut  $N_{t+h} - N_t = 0$  (avec une probabilité  $1 - p$ ), la variable aléatoire amplitude vaut  $Y_0 = 1$ . Tandis qu'en présence d'un saut (avec une probabilité  $p$ ),  $N_{t+h} - N_t = 1$ , l'amplitude  $Y_1$  suit une loi lognormale  $\mathcal{LN}(m, s^2)$ .

Ensuite, en tenant compte de l'information au temps  $t$ , il est possible d'écrire la loi de  $q_{t+h}$  sachant  $\mathcal{F}_t$  comme un mélange de loi log normale. Pour calibrer ses paramètres ( $\alpha, \sigma^2, m, s^2$  et  $p$ ), Lin & Cox (2006) utilise les données (annuelles i.e.  $h = 1$ ) de mortalité aux Etats-Unis.

Une fois la calibration réalisée, l'idée est de déformer la loi de probabilité (par l'intermédiaire de sa fonction de répartition) à l'aide de la transformée de Wang. Lin & Cox (2006) trouve la loi de la transformée de Wang d'un mélange de log normale par une méthode de Monte Carlo. C'est à dire elle simule des réalisations de  $q_t$  sous la probabilité historique  $\mathbb{P}$  pour  $t = 2004, 2005, 2006$  (les années du contrat). Après avoir déterminé la fonction de répartition empirique de  $q_t$ , on la déforme à l'aide de la transformée de Wang  $W_{\lambda,k}$ . Le paramètre  $k$  de la transformée est à la même valeur que dans Wang (2004) i.e.  $k = 6^1$ .

<sup>1</sup>Ce choix est a priori très arbitraire. D'autant plus que le paramètre d'une loi de Student peut être réel.

Ensuite, il ne reste plus qu'à calculer le pourcentage du nominal perdu (équation 1 et 2 de Lin & Cox (2006)). Le paramètre  $\lambda$  est ajusté pour obtenir l'écart de rendement observé pour la titrisation de Swiss Re 2003. La prise en compte de saut est crucial puisque l'on veut modéliser la surmortalité. Sans saut, cela revient à sous estimer la perte possible sur le nominal (cf. figure 4 de Lin & Cox (2006)). Lin & Cox (2006) arrive à la conclusion que la prime de risque  $\lambda$  est très généreuse pour les "mortality bond" de Swiss Re.

### 2.3.3 Application au risque de longévité

#### Modèle de Lin & Cox (2006)

Lin & Cox (2006) traite aussi le risque de longévité et calibre son modèle sur la seule titrisation (avortée) du risque de longévité. Cette opération lancée en 2004 par 3 entités à savoir l'EIB (European Investment Bank), BNP Paribas et Partner Re ont émis pour 775 millions d'euro d'obligations sur le risque de longévité.

Les montants des bons évoluent comme le nombre de survivants d'une population de référence, i.e. plus le nombre de survivants est grand plus les coupons sont élevés. Ainsi les acheteurs de protection (typiquement les fonds de pension) se protègent contre l'allongement de la durée de vie avec ce produit.

Lin & Cox (2006) adapte le modèle précédent au risque de longévité en modélisant non plus la probabilité  $q_t$  de décéder à l'année  $t$  mais la probabilité  ${}_tq_{65}$  de décéder à l'âge  $t + 65$  sachant que l'on ait âgé de 65 ans pour  $t \leq 25$ . Une fois avoir calibré les probabilité de décès sur les données de l'Angleterre et du Pays de Galles, on transforme la probabilité historique à l'aide de la transformée de Wang à deux paramètres (le second paramètre est choisi arbitrairement à 6 comme pour Wang (2004)). La prime de risque  $\lambda$  est calibré en utilisant le fait que le montant de l'émission est une rente viagère temporaire de 25 ans pour des individus de 65 ans.

Cette application numérique révèle que la prime de risque  $\lambda$  est bien moins élevée que pour les mortality bond. Ceci s'explique par le fait que le risque de longévité ne rentre pas dans la catégorie de risque catastrophique. Cependant Lin & Cox (2006) souligne que la prime de risque est trop élevée comparée à la réassurance traditionnelle. Ainsi, peu d'investisseurs ont acheté les mortality bond. Enfin une dernière raison (possible) pour l'échec de la titrisation du risque de longévité est le fort risque de base inhérent à cette opération, puisque la population de référence peut être (très) différente de la population assurée par le fond de pensions.

#### Modèle de Denuit et al. (2007)

Denuit et al. (2007) combine un modèle à intensité et la transformée de Wang. On considère le modèle de Lee & Carter (1992) pour le taux de mortalité

$$\mu(x, t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t,$$

où  $\kappa_t$  est une marche aléatoire gaussienne avec dérive et le vecteur de paramètres  $\beta_x$  vérifient  $\sum_t \kappa_t = 0$  et  $\sum_x \beta_x = 1$ .

Une fois supposé ce modèle, on peut calculer la probabilité de survie

$${}_t p_x = e^{-\sum_{i=0}^{t-1} \exp(\alpha_{x+i} + \beta_{x+i} \kappa_{t+j})}.$$

Ensuite, Denuit et al. (2007) construit sur le même principe un indice de mortalité  $I_{t,x_0} = {}_t p_{x_0}^{pros}$  où les paramètres  $\kappa$  sont aléatoires.  ${}_t p_{x_0}^{pros}$  va donc être comparé à  ${}_t p_{x_0}^{ref}$  utilisés pour tarifier les contrats d'assurance, pour lesquels  $\kappa$  sont supposés suivre un certaine série chronologique du type ARIMA. L'assureur veut se protéger du risque de longévité, i.e.  ${}_t p_{x_0}^{ref} < {}_t p_{x_0}^{pros}$ , il va émettre des obligations.

Pour évaluer l'obligation de longévité, on se dote d'une structure de taux d'intérêts<sup>1</sup>, et les coupons de l'obligation de longévité sont donnés par

$$C_t = c(1 + {}_t p_{x_0}^{ref} - {}_t p_{x_0}^{pros}) + c^*,$$

où  ${}_t p_{x_0}^{ref} < {}_t p_{x_0}^{pros}$  va faire diminuer les coupons,  $c^*$  est la prime de risque (inconnue) donnée aux investisseurs pour le risque de longévité assurée.  $c^*$  est calculé en utilisant du prix d'indifférence. C'est à dire on égalise l'espérance actualisée de coupons constants  $c$  avec l'espérance actualisée de coupons  $\rho(C_t)$ , où  $\rho$  est la mesure de risque utilisée pour "évaluer" les coupons aléatoires  $C_t$ <sup>2</sup>.

$\rho$  est choisie comme la mesure de risque de Wang associée à  $g(x) = \Phi(\Phi^{-1}(x) + \lambda)$ . C'est une mesure cohérente selon les critères décrits dans Artzner et al. (1999), ainsi  $\rho(C_t) = c(1 + {}_t p_{x_0}^{ref} - \rho(I_{t,x_0})) + c^*$ . Le problème réside donc à trouver  $c^*$  satisfaisant l'équation d'indifférence. Comme il n'existe pas de solutions analytiques pour  $\rho(I_{t,x_0})$ , Denuit et al. (2007) va chercher à encadrer cette quantité en utilisant différentes propriétés des mesures de risque cohérentes.

L'application numérique réalisée dans Denuit et al. (2007) s'intéresse au marché belge des rentes viagères (avec  $x_0 = 65$ ). Denuit et al. (2007) aboutissent à des primes de risque  $\lambda$  élevées comparées aux cat bond. Ils expliquent cette observation par le fait que  ${}_t p_{x_0}^{ref}$  ne contient pas de chargement de sécurité. Par conséquent les investisseurs supportent entièrement le risque de déviation de mortalité. La différence entre le modèle de Lin & Cox (2006) et Denuit et al. (2007) est que le premier cherche véritablement à transférer le risque de longévité, tandis que le second est basé sur la différence par rapport à une table de référence.

### 2.3.4 La perturbation exponentielle

Pour terminer cette section sur les transformées de probabilité, nous présentons brièvement Wang (2007). Wang (2007) définit la perturbation exponentielle<sup>3</sup> d'une densité par

$$f_X^*(x) = f_X(x) c E \left[ e^{\lambda Y} \middle| X = x \right],$$

où  $X$  est la variable aléatoire d'intérêt et  $Y$  une variable aléatoire de référence. Pour que les paramètres  $c$  et  $\lambda$  soient interprétables, la variable  $Y$  est supposée de loi normale. De plus, dans une version ultérieure de Wang (2007) prouve que la perturbation exponentielle est équivalente à la transformée de Wang<sup>4</sup>. Enfin Wang (2007) choisit un modèle stochastique pour  $\ln(q_t)$  et utilise la perturbation exponentielle pour l'évaluer.

<sup>1</sup>Denuit et al. (2007) choisissent un modèle d'Hull et White.

<sup>2</sup>cf. équation (9) de Denuit et al. (2007).

<sup>3</sup>Wang (2007) définit la perturbation exponentielle dans un cadre multivarié.

<sup>4</sup>cf. théorème 1 page 725 de Wang (2007).

## 2.4 Evaluation à l'aide de fonctions d'utilité et mesures de risques

Cette section regroupe les travaux de valorisation de produits de titrisations à l'aide de fonction d'utilité (ou de préférence) et de mesures de risque.

### 2.4.1 Fonctions de préférence

Lane (2000) propose une approche pour évaluer le spread pour les titrisations de risque d'assurance. Il est modélisé de la manière suivante  $spread = EL + ERR$  où  $EL$  désigne la perte espérée ("expected loss") et  $ERR$  le différentiel de rendement espéré ("expected excess return"). Seule la partie  $ERR$  est supposée inconnue et donc à modéliser. Lane (2000) se base sur deux variables à savoir la probabilité de première perte  $PFL$  ("probability of first loss") et la perte espérée conditionnelle  $CEL$  ("conditional expected loss"). Lane (2000) suppose la relation suivante pour ces différentes variables  $ERR = f(PFL) \times g(CEL)$ , où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions régulières.

Différentes type de fonctions de "préférence" sont utilisés linéaire, quadratique et log-linéaire. On peut déjà noter que lorsqu'on choisit la fonction identité pour  $f$  et  $g$ , alors on retrouve que le différentiel de rendement espéré est la perte espérée. En effet,  $ERR$  est égal dans ce cas le produit du PFL et CEL. Lane (2000) estime les paramètres pour les cas suivants :

- linéaire :  $f(x) = \gamma + \alpha x$  et  $g(x) = \beta x$ ,
- quadratique :  $f(x) = \gamma + \alpha x + \tilde{\alpha}x^2$  et  $g(x) = \beta x + \tilde{\beta}x^2$ ,
- log-linéaire :  $f(x) = \gamma x^\alpha$  et  $g(x) = x^\beta$ .

En minimisant l'erreur quadratique moyenne, Lane (2000) est capable de trouver les paramètres. Il arrive à la conclusion que le modèle log-linéaire est le plus adapté aux données. Ensuite des prix de spread peuvent être déterminées à l'aide des modèles calibrés (e.g. page 276 Lane (2000)). Enfin, un modèle plus avancé à l'aide de fonctions d'utilité et de risques négativement corrélés a été proposé par Ankirchner et al. (2007).

### 2.4.2 Mesures de risques

Barriou & El Karoui (2004b), Barriou & El Karoui (2004a) traite dans un cadre mathématique plus rigoureux la notion de mesure de risque. La valeur au risque ou "value at risk" en anglais est probablement la mesure de risque la plus utilisée, principalement à cause du fait qu'elle fait partie du cadre réglementaire Bâle II.

Cependant, Artzner et al. (1999) a fait remarquer que la valeur at risk n'était pas une mesure de risque cohérente (car non sous-additive). Artzner et al. (1999) a en fait listé les propriétés que les mesures de risque doivent vérifier pour qu'une mesure de risque soit considérée comme cohérente :

- monotonie
- invariance par translation
- homogénéité positive
- sous-additivité

En fait, Barriou & El Karoui (2004b) impose la convexité et pas seulement la sous additivité d'une mesure de risque cohérente. Des exemples de mesures cohérentes sont la "Tail VaR", la "Conditional

VaR” ou encore l’ “Expected Shortfall”.

Toujours dans un cadre mathématique assez poussé, Artzner et al. (1999) élabore une relation de dualité entre les mesures de risque cohérente et les ensembles d’acceptabilité. Cela permet de voir les mesures de risque comme la quantité minimale de capital qu’il faut rajouter pour qu’une position devienne “acceptable”.

Dans le cadre des mesures de risque convexes, Barrieu & El Karoui (2004b) propose d’évaluer le transfert d’un risque non négociable (sur un marché) sur un marché financier (i.e. la titrisation d’un risque d’assurance). Notons  $X$  le montant (en perte) du risque à transférer,  $D$  l’agent “assureur” (i.e. demandeur de protection) et  $E$  l’émetteur de la protection (payé  $\pi$  en 0 et procurant le flux  $F$  à échéance). Le but de l’émetteur est donc déterminer la valeur de  $\pi$  et  $F$ . On pose  $\rho_E$  et  $\rho_D$  les mesures de risque pour ces deux agents. La structure optimale pour l’émetteur s’écrit donc

$$\inf_{\pi, F} \rho_E(\pi + F),$$

sous la contrainte que le demandeur achète la protection

$$\rho_D(X - F - \pi) \leq \rho_D(X).$$

Barrieu & El Karoui (2004b) montre que ce problème est équivalent à un problème de convolution d’infimum ou “inf-convolution” en anglais. A part dans de cas très simple (mesure de risque vérifiant la propriété de dilatation<sup>1</sup>), il n’y a pas de solutions simples à ce problème.

Cependant, l’approche de Barrieu & El Karoui (2004b) est suffisamment générale pour prendre en compte des cas très intéressants. Les auteurs montrent que lorsque les deux agents ont possibilité d’investir sur les marchés financiers, cela ne change pas le type de problème. On reste dans un problème de convolution d’infimum.

Barrieu & Loubergé (2007) a amélioré cette approche en considérant un troisième agent. En effet, dans l’approche supra, l’agent  $D$  et  $E$  se rencontrent directement i.e. il n’y a pas d’intermédiaires. De plus, ce n’est pas très réaliste que l’agent  $D$  (représentant l’assureur) n’émette pas lui même la transaction pour se protéger.

Barrieu & Loubergé (2007) considère donc 3 agents  $A, B$  et  $C$ , où  $B$  va jouer le rôle d’intermédiaire entre  $A$  et  $C$ , tandis que le premier ayant un risque à transférer et le second étant un investisseur. Là, encore, Barrieu & Loubergé (2007) utilise des mesures de risque convexe<sup>2</sup> pour les deux agents  $A$  et  $C$  (l’intermédiaire  $B$  étant considéré comme neutre au risque). Les auteurs étudient deux types de transaction : le cat bond simple et le cat bond hybride.

### Cat bond simple

Les flux entre les trois agents peuvent se résumer dans le tableau 2.1. L’agent  $A$  titrise son risque cat pour un nominal  $N$ . Le titre est racheté par  $B$  (au prix  $\pi_A$ ) pour être directement

<sup>1</sup>cf. page 6 de Barrieu & El Karoui (2004b).

<sup>2</sup>afin d’obtenir des résultats explicites, ils choisissent la mesure de risque entropique i.e.  $\rho(X) = \gamma \ln \left( E_{\mathbb{Q}} \left[ e^{-\frac{X}{\gamma}} \right] \right)$  où  $\mathbb{Q}$  désigne la probabilité d’entropie minimale, cf. Barrieu & El Karoui (2004b).

Etat de la nature	Agent A	Agent B	Agent C
aucune catastrophe ( $\tau > T$ )	$\pi_A - N$	$\pi_C - \pi_A$	$-\pi_C + N$
catastrophe de montant $X$ ( $\tau < T$ )	$\pi_A - X$	$\pi_C - \pi_A$	$-\pi_C$

TAB. 2.1 – Flux à échéance

revendu à  $C$  (au prix  $\pi_C$ ). Si à l'échéance  $T$  du contrat, il n'y a pas eu de catastrophe, l'agent  $A$  perd son nominal  $N$  au profit de  $C$ . Sinon, l'agent  $A$  recouvre le nominal pour payer le montant  $X$  de sinistres. La solution (i.e. la détermination du montant titrisé  $N$ ) est trouvée en résolvant le problème d'optimisation :

$$\max_{N, \pi_A, \pi_C} \pi_C - \pi_A,$$

sous contrainte que la titrisation ait lieu

$$\begin{cases} \rho_A(\pi_A - N\mathbb{1}_{\tau > T} - X\mathbb{1}_{\tau < T}) \leq \rho_A(-X\mathbb{1}_{\tau < T}) \\ \rho_C(-\pi_C + N\mathbb{1}_{\tau > T}) \leq \rho_C(0) \end{cases} .$$

Une formule explicite des trois inconnues  $N, \pi_A, \pi_C$  existe pour des mesures de risque entropiques : cf. équation 4, 5 et 6 de Barrieu & Loubergé (2007).

### Cat bond hybride

Quant au cat bond dit hybride, la différence est que l'agent  $B$  a un rôle plus important. Il garantit à l'investisseur un montant  $H$  en cas de catastrophe et "crack boursier". Cela permet à l'investisseur  $C$  de ne pas avoir à supporter deux gros risques à la fois. Le tableau des flux devient le tableau 2.2. On résout un problème d'optimisation du même type (des solutions explicites existent

Etat de la nature	Agent A	Agent B	Agent C
aucune catastrophe et crack boursier	$\pi_A - N_h$	$\pi_C - \pi_A$	$-\pi_C + N_h - H$
aucune catastrophe et boom boursier	$\pi_A - N_h$	$\pi_C - \pi_A$	$-\pi_C + N_h$
catastrophe de montant $X$ et crack boursier	$\pi_A - X$	$\pi_C - \pi_A$	$-\pi_C + H$
catastrophe de montant $X$ et boom boursier	$\pi_A - X$	$\pi_C - \pi_A$	$-\pi_C$

TAB. 2.2 – Flux à échéance

pour les mesures de risque entropique).

### Avantage du produit hybride

Barrieu & Loubergé (2007) montre que le nominal titrisé du produit hybride  $N_h$  est supérieur au montant nominal "classique"  $N$ . Ainsi l'introduction d'un produit hybride devrait augmenter les montants transférés aux marchés financiers.

## Chapitre 3

# Calibration d'un modèle pour le risque catastrophique de mortalité

Cette troisième et dernière partie va présenter la calibration d'un modèle de mortalité catastrophique. Nous plaçons dans ce chapitre encore une fois dans une optique d'évaluation. Pour la modélisation "pure" de la mortalité historique, de multiples articles dont Currie et al. (2004), Currie et al. (2006), Currie & Kirkby (2008), traitent ce sujet<sup>1</sup>. Un résumé et une comparaison des différents modèles est faite par Cairns et al. (2007) en partant du très connu modèle de Lee & Carter (1992). Cependant dans cette partie, nous cherchons à évaluer le mortality bond de la titrisation Tartan, c'est pourquoi nous nous concentrons sur un modèle d'évaluation particulier.

### 3.1 Présentation de la titrisation Tartan

La titrisation Tartan a été réalisée en 2006 par Goldman Sachs pour protéger le réassureur bermudien Scottish Re, sa structure est donnée en figure 3.1. Très classiquement, on retrouve un SPV (Tartan Capital Limited) comme intermédiaire central. Une fois que les investisseurs (de classe A ou B) ont déposé le nominal, le nominal est collatéralisé dans un compte prévu à cet effet (collateral account). Le cédant SALIC<sup>2</sup> paie trimestriellement un montant tiré de ses primes au SPV Tartan. Ce dernier se doit d'indemniser le réassureur SALIC si l'indice de mortalité a été déclenché. Goldman Sachs se charge de garantir un taux d'intérêt (LIBOR à 3 mois diminué de 10 points de base). Tandis que le fond de garantie FGIC<sup>3</sup> garantit le nominal et les intérêts pour la classe A des investisseurs.

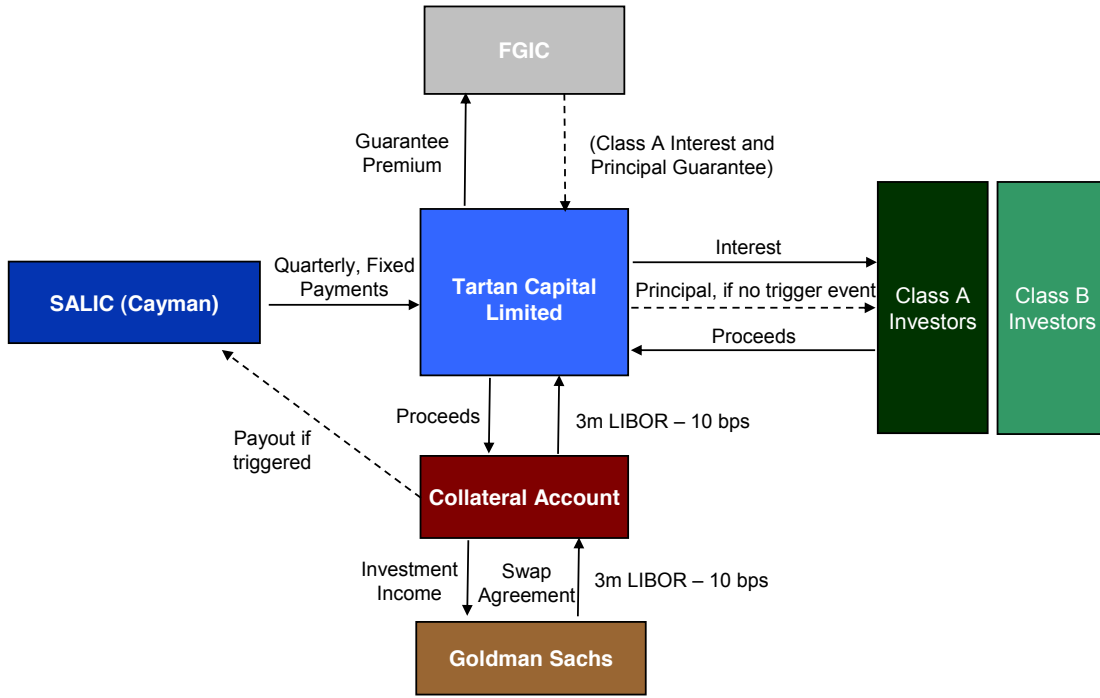
Les détails financiers sur les classes A et B sont regroupés dans le tableau 3.1. A noter que les spreads indiqués sont les spreads lors de l'émission de la titrisation. Pour une classe donnée, le pourcentage du nominal perdu est proportionnel entre le seuil de déclenchement  $d$  et la limite  $l$ .

---

<sup>1</sup>Currie & Kirkby (2008) utilise une extension des modèles linéaires généralisés.

<sup>2</sup>Scottish Annuity & Life Insurance Company Ltd.

<sup>3</sup>Financial Guaranty Insurance Co.

FIG. 3.1 – Titrisation Tartan<sup>1</sup>

Ainsi en année  $t$ , la perte en pourcentage du nominal s'exprime par

$$l_t = \left( l_{t-1} \vee \frac{i_t - d}{l - d} \right) \wedge 1,$$

pour  $t = 2008, 2009$ ,  $l_{2006} \triangleq 0$  et  $i_t$  désigne l'indice au temps  $t$ . Nous le définissons au prochain paragraphe.

Classe	Taille de la tranche	Maturité	Déclenchement $d$	Limite $l$	Spread	Rating
A	75 Mill \$	3 ans	110%	115%	+19bps	AAA/Aaa
B	80 Mill \$	3 ans	115%	120%	+300bps	BBB/Baa3

TAB. 3.1 – Détails sur les classes<sup>2</sup>

Le déclenchement des obligations se fait par rapport à un indice paramétrique basé sur la mortalité US des deux dernières années. Les taux de mortalité sont ceux issus de l'organisme américain CDC (Center for Disease Control and prevention). De plus, la population de référence est pondérée suivant le sexe et l'âge, comme indiqué dans le tableau 3.2. Concrètement, le taux de mortalité pondéré  $\hat{q}_{\omega,t}$  vaut

$$\hat{q}_{\omega,t} = \sum_x (\omega_{x,m} \hat{q}_{x,m,t} + \omega_{x,f} \hat{q}_{x,f,t}),$$

<sup>1</sup>source Linfoot (2007).

<sup>2</sup>source Linfoot (2007).

où  $\hat{q}_{x,m,t}$  et  $\hat{q}_{x,f,t}$  dénotent les taux de mortalité estimés pour les hommes et les femmes d'âge  $x$  au temps  $t$ . À partir de ce taux, on définit l'indice par rapport aux années de référence par

$$i_t = \frac{\hat{q}_{\omega,t} + \hat{q}_{\omega,t-1}}{\hat{q}_{\omega,2005} + \hat{q}_{\omega,2004}}.$$

Il faut donc que la mortalité soit forte pendant deux années consécutives pour que l'indice  $i_t$  dépasse les seuils de déclenchement.

Age $x$	1-4	5-14	15-24	25-34	35-44	45-54	55-64	65-74	75-84	84+	total
$\omega_{x,m}$	0%	0,1%	0,4%	8,2%	26,0%	21,4%	9,8%	2,3%	0,6%	0,1%	68,9%
$\omega_{x,f}$	0%	0,1%	0,4%	6,1%	12,7%	7,8%	2,7%	0,8%	0,4%	0,1%	31,1%

TAB. 3.2 – Poids aux différents âges par sexe<sup>1</sup>

### 3.2 Présentation du modèle

Le modèle de Bauer & Kramer (2007) consiste à choisir un taux de mortalité stochastique défini par

$$\mu(x_t, t) = Y_t e^{bx_t + c} + \Gamma_t,$$

où  $x_t$  est l'âge de l'individu en  $t$ ,  $b$  et  $c$  sont deux constantes réelles et les processus  $(Y_t)_t$  et  $(\Gamma_t)_t$  ont pour dynamique

$$dY_t = \alpha(\beta - Y_t)dt + \sigma\sqrt{Y_t}dW_t, \quad Y_0 > 0 \quad (3.1)$$

$$d\Gamma_t = -\kappa\Gamma_t dt + dJ_t, \quad \Gamma_0 = 0 \quad (3.2)$$

dans lesquelles  $(W_t)_t$  est un mouvement brownien standard et  $(J_t)_t$  un processus de Poisson composé à sauts exponentiels. Ainsi, le processus  $(Y_t)_t$  défini par (3.1) est un processus de Cox, Ingersoll et Ross<sup>2</sup>, où  $\beta$  représente la tendance générale du taux de mortalité,  $\alpha$  la force de retour à la moyenne et  $\sigma$  la volatilité. Le processus  $(\Gamma_t)_t$  défini par (3.2) est du type Gamma - Ornstein Uhlenbeck avec une composante à sauts  $(J_t)_t$ . On note  $\lambda$  l'intensité du processus de poisson et  $\zeta$  le paramètre de la loi exponentielle pour le processus  $(J_t)_t$ .

Ensuite la probabilité  ${}_{T-t}p_{x_0+t}$  de vivre jusqu'en  $T$  pour un individu d'âge  $x_0 + t$  en  $t$  est donnée par

$$\begin{aligned} {}_{T-t}p_{x_0+t} &\triangleq E \left[ e^{-\int_t^T \mu(x_0+s, s) ds} \middle/ \mathcal{F}_t \right] \\ &= \left( 1 + \frac{1}{\zeta\kappa} \left( 1 - e^{-\kappa(T-t)} \right) \right)^{\frac{\lambda\zeta}{\zeta\kappa+1}} e^{f(T-t) + g(T-t)Y_t e^{b(x_0+t)+c} - \frac{\Gamma_t}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-t)}) - \frac{\lambda(T-t)}{\zeta\kappa+1}}, \quad (3.3) \end{aligned}$$

où les fonctions  $f$  et  $g$  vérifient les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha\beta f(x) e^{b(x_0+T-x)+c}, \quad f(0) = 0 \\ g'(x) &= -1 - (\alpha - b)g(x) + \frac{1}{2}\sigma^2 g^2(x) e^{b(x_0+T-x)+c}, \quad g(0) = 0. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>source Linfoot (2007).

<sup>2</sup>cf. Cox et al. (1985).

Une démonstration de ces expressions se trouvent dans les annexes de Bauer & Kramer (2007). La résolution du système d'équations différentielles se trouvent en annexe E. Il faut noter que c'est une probabilité aléatoire (présence de  $Y_t$  et  $\Gamma_t$ ) puisque l'on a considéré un modèle à mortalité stochastique.

### 3.3 Calibration

Nous allons estimer les paramètres en deux temps : tout d'abord  $b$ ,  $c$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\sigma$  pour la composante principale, puis  $\lambda$ ,  $\kappa$  et  $\zeta$  pour la composante à sauts. Comme nous voulons pouvoir comparer nos résultats avec ceux de Tartan, les paramètres de la composante principale seront estimés pour les hommes et les femmes. Cependant nous ne pourrons le faire pour la composante "catastrophe" d'une part à cause du faible nombre de données et d'autre part car les pandémies ou autre épidémies touchent a priori autant les hommes que les femmes.

De plus, comme la population de "référence" pour Tartan est la population américaine, nous nous baserons exclusivement sur les taux de mortalité de la population américaine. Nous ne conserverons que les données d'après guerre (1946) jusqu'à nos jours (2005) et les âges les plus pondérés (entre 25 et 95 ans). Toutes les données sont issus du HMD<sup>1</sup>.

Enfin pour rendre compte de l'allure des données, nous avons tracé un graphe des taux de mortalité (bruts) pour la table globale en figure 3.2. Soulignons que toutes les applications numériques de ce rapport ont été fait en  $\mathbb{R}^2$ .

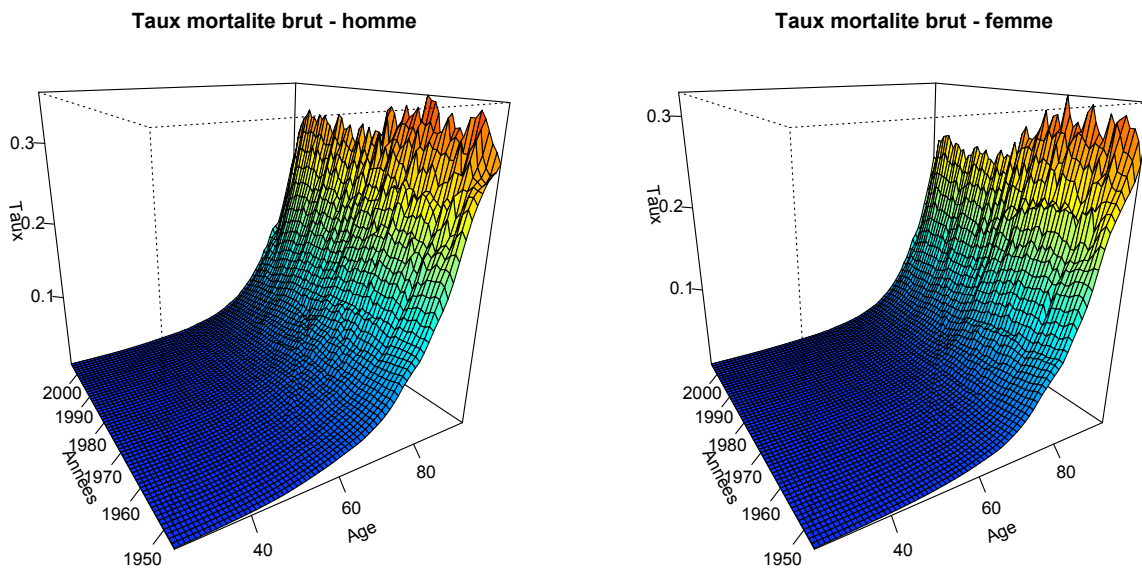


FIG. 3.2 – Taux de mortalité bruts

<sup>1</sup>Human Mortality Database. 'University of California, Berkeley (USA)', et 'Max Planck Institute for Demographic Research (Germany)'. Disponible sur [www.mortality.org](http://www.mortality.org) ou [www.humanmortality.de](http://www.humanmortality.de) (données téléchargées le 15/04/2008).

<sup>2</sup>cf. R Development Core Team (2008).

### 3.3.1 Calibration de la composante principale

On procède en deux temps, en estimant d'abord les coefficients  $b$  et  $c$  de la partie log-linéaire de  $\mu(x_t, t)$  puis les paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\sigma$  de la perturbation  $Y_t$ . En ignorant la composante à sauts, on a

$$\mu(x_t, t) = Y_t e^{bx_t + c}.$$

En imposant  $Y_0 = 1$ , on obtient que

$$\ln(\mu(x_0, 0)) = bx_0 + c.$$

Ainsi une régression linéaire pour tous les âges  $x_0$  nous permet d'obtenir des estimations de  $b$  et  $c$ . Ces estimations sont regroupées dans le tableau infra. Comme proposé par Bauer & Kramer

Paramètre	Estimation homme	Estimation femme
$\hat{b}$	0,07505683	0,07900368
$\hat{c}$	-8,193588	-8,753605

TAB. 3.3 – Estimations des paramètres  $b$  et  $c$

(2007), nous utilisons la méthode des moments pour estimer les paramètres du processus  $(Y_t)_t$ . En discrétisant l'équation (3.1), on obtient

$$Y_{t+1} - Y_t = \alpha(\beta - Y_t) + \sigma\sqrt{Y_t}\widetilde{W}_t,$$

où les variables  $\widetilde{W}_t$  sont i.i.d. selon une loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ . En retravaillant l'expression supra, on trouve

$$\sigma\widetilde{W}_t = \frac{Y_{t+1}}{\sqrt{Y_t}} - \sqrt{Y_t} + \alpha\sqrt{Y_t} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{Y_t}},$$

qui suit une loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Les 3 premiers moments de la variable  $\sigma\widetilde{W}_t$  sont 0,  $\sigma^2$  et 0 pour tout  $t$ . Par conséquent, en prenant les estimateurs empiriques de ces 3 moments, on doit résoudre le système suivant pour trouver les estimateurs des moments de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\sigma$  :

$$\begin{cases} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \left( \frac{Y_{t+1}}{\sqrt{Y_t}} - \sqrt{Y_t} + \alpha\sqrt{Y_t} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{Y_t}} \right) = 0 \\ \frac{1}{T-1} \sum_{t=0}^{T-1} \left( \frac{Y_{t+1}}{\sqrt{Y_t}} - \sqrt{Y_t} + \alpha\sqrt{Y_t} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{Y_t}} \right)^2 = \sigma^2 \\ \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \left( \frac{Y_{t+1}}{\sqrt{Y_t}} - \sqrt{Y_t} + \alpha\sqrt{Y_t} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{Y_t}} \right)^3 = 0 \end{cases}.$$

Numériquement, on obtient les résultats du tableau 3.4.

Enfin, le graphique de l'ajustement log-linéaire en 0 (i.e. 1946) et l'estimation du processus  $(Y_t)_t$  sont donnés en annexe D.

### 3.3.2 Calibration de la composante “catastrophe”

L'estimation des paramètres de la composante “catastrophe” est nettement plus problématique. En effet, le faible nombre de pandémies répertoriées ces dernières (dizaines) d'années a pour

Paramètre	Estimation homme	Estimation femme
$\hat{\alpha}$	0.2414907	0.1166511
$\hat{\beta}$	0.4884689	0.3717058
$\hat{\sigma}$	0.02581353	0.02512161

TAB. 3.4 – Estimations des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\sigma$ 

conséquence de créer une incertitude assez importante sur les paramètres. Selon Lazzari & Stohr (2004), le nombre de pandémies depuis 1580 est de 31. Ainsi le nombre moyen de pandémie par an est  $\frac{31}{2005-1580} = 0,072941$ . Comme pour une loi de Poisson, l’estimateur de maximum de vraisemblance est juste sa moyenne empirique, on conclut que  $\hat{\lambda} = 0,072941$ .

Durant le XX<sup>ème</sup> siècle, il y a eu 5 pandémies à travers le monde. Selon Linfoot (2007), les données concernant ces 5 pandémies appliquées à la population américaine sont les suivantes :

Année	1918-1920	1957-1958	1968	1977	2003
Excès de mortalité	26,55%	6,92%	1,78%	1,08%	3,23%
Percentile	3,2%	27,4%	75,8%	100%	51,6%

TAB. 3.5 – Pandémies durant le XX<sup>ème</sup> siècle

L’excès de mortalité est défini comme le rapport du différentiel de taux de mortalité (entre le taux observé et le taux espéré) sur le taux espéré. Le taux espéré est calculé en faisant une régression sinusoidale (sur les données ne contenant pas d’épidémies) dans le cas du CDC<sup>1</sup>. Ainsi, une épidémie est détectée lorsque la mortalité dépasse l’intervalle de confiance à 95% pendant deux semaines consécutives<sup>2</sup>. Les percentiles désignent les percentiles de la vraisemblance, i.e. le nombre de pandémies pires ou égales à celle considérée rapporté au nombre total de pandémie. A partir ces données, on ajuste des quantiles d’une loi exponentielle  $\mathcal{E}(\zeta)$ . On trouve  $\hat{\zeta} = 5,283134$ .

Enfin, le paramètre  $\kappa$  est imposé selon le même principe que Bauer & Kramer (2007). On suppose que deux ans après une pandémie, le processus  $\Gamma$  est inférieur à 1% de son niveau lors de la pandémie. Donc  $\hat{\kappa} = 2 \ln(100) = 9,21034$ .

### 3.4 Résultat : comparaison avec les “spreads” observés

Maintenant que la calibration est réalisée, il nous faut

1. simuler un grand nombre de probabilité de survie  $({}_{2007+t}p_{x_{2006+t}})_{t=0,1,2}$ <sup>3</sup>,
2. calculer l’indice  $(i_{2007+t})_{t=0,1,2}$  et donc  $(l_{2007+t})_{t=0,1}$ ,

<sup>1</sup>Center for Disease Control and prevention.

<sup>2</sup>cf. Shube et al. (1997).

<sup>3</sup>cette étape a été réalisée en simulant le processus  $Y_t$  sachant  $Y_{t-1}$ . On a utilisé le package `sde` (cf. Iacus (2007).) pour simuler la loi conditionnelle d’un processus de Cox, Ingersoll, Ross.

3. calculer les réalisations de spread  $s$ , et en faire la moyenne.

Pour trouver les “spreads”, il faut trouver le taux  $s$  telle que la somme actualisée des flux au taux sans risque soit nul, i.e.

$$0 = \underbrace{\text{investissement initial}}_{-1} + \overbrace{\frac{r+s}{1+r} + \frac{r+s}{(1+r)^2} + \frac{(r+s)(1-l_{2007})}{(1+r)^3}}^{\text{coupons}} + \overbrace{\frac{1-l_{2007} \wedge l_{2008}}{(1+r)^3}}^{\text{nominal}},$$

où  $r$  désigne le taux sans risque,  $l_t$  la perte sur nominal (cf. section 3.1). La solution est

$$s = \left(1 - \frac{1-l_{2007} \wedge l_{2008}}{(1+r)^3}\right) \left(\frac{1}{1+r} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1-l_{2007}}{(1+r)^3}\right)^{-1} - r.$$

Pour les calculs, nous avons choisi le taux  $r$  comme le LIBOR 1 an début 2005 soit 3,2710%<sup>1</sup>. On trouve les résultats suivants pour 10000 simulations.

Spread	Classe B	Classe A
Empirique	359.8 bps	54.1 bps
Coté	300bps	19bps

TAB. 3.6 – Résultats

<sup>1</sup>cf. <http://www.moneycafe.com/library/libor.htm>.

# Conclusion

Dans ce rapport, nous avons pu découvrir toute la complexité des titrisations des risques d'assurance. Même si la structure générale d'une titrisation assurantielle est la même que celle d'une titrisation bancaire, d'énormes différences apparaissent. Les spécificités du déclenchement des produits de titrisation ainsi que la nature du risque sous-jacent rendent les titrisations des risques d'assurance uniques.

Se concentrant sur les opérations de titrisations passées, le premier chapitre a analysé de manière générique les titrisations non vie et vie. Nous avons mis en exergue la complexité de la structuration du SPV. De plus, nous avons constaté comment le risque de base et l'aléa moral pouvaient être pris en compte dans l'indice servant au déclenchement du produit.

Le deuxième chapitre a mis en avant la multitude de modèles pour évaluer les produits de titrisations. Les quatre approches, à savoir les modèles à intensité, les modèles structurels, les transformées de probabilité et les fonctions d'utilité, ont toutes des spécificités propres qui les rendent plus ou moins attractives. En tous cas, le marché des titrisations assurantielles est suffisamment jeune pour qu'il n'y ait pas de modèle de référence.

Le dernier chapitre quant à lui présente une application numérique d'un modèle à mortalité stochastique. Le modèle de Bauer & Kramer (2007) a été calibré sur les données historiques aux US. Par Monte Carlo, on a ensuite évalué l'indice servant aux déclenchements des tranches. Les résultats montrent que l'on surestime les spreads par rapport à ceux observés.

Malgré toute la densité de ce rapport, beaucoup de développements peuvent être réalisés. A première vue, une analyse de sensibilité du modèle de Bauer & Kramer (2007) serait appréciée. Cependant, le plus intéressant serait de calibrer un modèle d'un autre type (e.g. un modèle avec transformée de Wang) sur la titrisation Tartan, puis de comparer les résultats. Enfin, une analyse plus poussée des quatre types de modèles pourrait révéler quel type de modèle est plus adaptée à tel type de risque titrisé.

# Bibliographie

- Aigrain, J. (2007), Ubs swiss alpine summit, *in* ‘Présentation de Swiss Re’. 24
- Albrecher, H., Hartinguer, J. & Tichy, R. F. (2003), ‘Multivariate approximation methods for the pricing of catastrophe linked bonds’, *Internat. Ser. Numer. Math.* (145), 21–39. 32
- Albrecher, H., Hartinguer, J. & Tichy, R. F. (2004), ‘Qmc techniques for cat bond pricing’, *Monte Carlo Methods Appl.* **10**(3-4), 197–211. 29
- Alferieff, M. & Le Goff, A. (2007), ‘La titrisation des risque assurances : une solution pour le marché face au risque de pandémie’, *Séminaire Innovation.* **22**, 25
- Ankirchner, S., Imkeller, P. & Alexandre, P. (2007), Optimal cross hedging of insurance derivatives. working paper. 37
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. & Heath, D. (1999), ‘Coherent measures of risk’, *Mathematical Finance* **9**(3), 203–228. 36, 37, 38
- Axa lance la première titrisation d’un portefeuille d’assurance automobile* (2005), Communiqué de Presse.  
**URL:** [www.axa.com](http://www.axa.com) 9, 17
- Barrieu, P. & El Karoui, N. (2004a), ‘Optimal derivatives design under dynamic risk measures’, *Mathematics of Finance, Contemporary Mathematics* pp. 13–26. 37
- Barrieu, P. & El Karoui, N. (2004b), ‘Optimal risk transfer’, *Finance* **25**, 31–47. 37, 38
- Barrieu, P. & Loubergé, H. (2007), ‘Hybrid cat bonds’, *Swiss Finance Institute* (7-27). working paper in FINRISK. 38, 39
- Baryshnikov, Y., Mayo, A. & Taylor, D. (2001), Pricing of cat bonds. article.  
**URL:** [citeseer.ist.psu.edu/baryshnikov98pricing.html](http://citeseer.ist.psu.edu/baryshnikov98pricing.html) 27, 28
- Bauer, D. & Kramer, F. W. (2007), Risk and valuation of mortality contingent catastrophe bonds. preprint. 7, 42, 43, 44, 45, 47
- Brace, A., Gatarek, D. & Musiela, M. (1997), ‘The market model of interest-rate dynamics’, *Mathematical Finance* **7**, 127–155. 30
- Burnecki, K., Kukla, G. & Taylor, D. R. (2004), ‘Pricing of catastrophe bonds’. 27, 29
- Cabrera, B. L. & Hardle, W. K. (2007), ‘Calibrating cat bonds for mexican earthquakes’, *Economic Risk Berlin* . 27, 29

- Cairns, A. J., Blake, D. & Dowd, K. (2006a), Pricing death : Frameworks for the valuation and securitization of mortality risk. Centre for Risk and Insurance Studies discussion paper. 29, 30
- Cairns, A. J., Blake, D. & Dowd, K. (2006b), 'A two-factor model for stochastic mortality with parameter uncertainty : Theory and calibration', *Journal of Risk and Insurance* **73**, 687–718. 30
- Cairns, A. J., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G. D., Epstein, D., Ong, A. & Balevich, I. (2007), A quantitative comparison of stochastic mortality models using data from england & wales and the united states. preprint. 40
- Canabarro, E., Finkemeier, M., Anderson, R. R. & Bendimerad, F. (2000), 'Analyzing insurance-linked securities', *The journal of risk finance* . 16, 28, 32, 54
- Charpentier, A. (2002), Titrisation des risques catastrophes : les cat-bonds, Technical report, Fédération Française des Sociétés d'Assurance. 16, 31
- Cox, J., Ingersoll, J. & Ross, S. (1985), 'A theory of the term structure of interest rates', *Econometrica* **53**, 385–408. 30, 31, 42
- Cox, S. H. & Pedersen, H. W. (2000), 'Catastrophe risk bonds', *North American Actuarial Journal* **4**, 56–82. 31
- Cummins, J. D. (2004), 'Securitization of life insurance assets and liabilities', *TIAA-CREF Institute* . 19, 53
- Cummins, J. D., Lalonde, D. & Phillips, R. D. (2002), 'The basis risk of catastrophic-loss index securities', *Journal of financial economics* **71**, 77–111. 31
- Currie, I. D., Durban, M. & Eilers, P. H. (2004), 'Smoothing and forecasting mortality rates', *Statistical Modelling* **4**, 279–298. 40
- Currie, I. D., Durban, M. & Eilers, P. H. (2006), 'Generalized linear array models with applications to multidimensional smoothing', *Journal of the Royal Statistical Society* **68**(2), 259–280. 40
- Currie, I. D. & Kirkby, J. G. (2008), Smooth models of mortality with period shocks, in 'Proceedings of 22nd International Workshop on Statistical Modelling'. 40
- Dahl, M. (2004), 'Stochastic mortality in life insurance : market reserves and mortality-linked insurance contracts', *Insurance : Mathematics and Economics* **35**, 113–136. 30
- Denuit, M., Devolder, P. & Goderniaux, A.-C. (2007), 'Securitization of longevity risk : Pricing survivor bonds with wang transform in the lee-carrier framework', *Journal of Risk and Insurance* **74**(1), 87–113. 35, 36
- Doherty, N. O. (1997), 'Financial innovation in the management of catastrophe risk', *Journal of Applied Corporate Finance* (10), 134–170. 7
- Flesaker, B. & Hughston, L. (1996), 'Positive interest', *Risk* **9**(1), 46–49. 30
- Gorvett, R. W. (1999), Insurance securitization : the development of a new asset class. working paper. 7, 15, 54
- Heath, D., Jarrow, R. & Morton, A. (1992), 'Bond pricing and the term structure of interest rates : A new methodology for contingent claims valuation', *Econometrica* **60**, 77–105. 30

- Helpenstein, R. (2006), La titrisation : nouvelles opportunités pour les assureurs et les investisseurs, Technical report, Swiss Re. 9, 11, 15, 19, 21, 22, 54
- Iacus, S. M. (2007), *sde : Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations*. R package version 2.0.0. 45
- Ince, E. L. (1956), *Ordinary Differential Equations*, New York : Dover Publications. 60
- Ishaq, A. (2005), ‘Reinsuring for catastrophes through industry loss warranties – a practical approach’, *Casualty Actuarial Society Forum* . 13
- IXIS (2004), ‘Pylon : the securitization of weather risk on electricity distribution lines’, Présentation à Londres pour ‘Weather Risk Management Association’. 18, 19
- Jang, J.-W. & Dassios, A. (2003), ‘Pricing of catastrophe reinsurance and derivatives using the cox process with shot noise intensity’, *Finance and Stochastics* **7**(1), 73–95. available at <http://ideas.repec.org/a/spr/finsto/v7y2003i1p73-95.html>. 29
- Kukla, G. & Burnecki, K. (2003), ‘Pricing of zero-coupon and coupon cat bonds’, *Applied Mathematics (Warsaw)* **30**(3), 315–324. 27, 29
- Lane, M. N. (2000), ‘Pricing risk transfer transactions’, *Astin Bulletin* **30**(2), 259–293. 34, 37
- Lazzari, S. & Stohr, K. (2004), ‘Avian influenza and influenza pandemics’, *Bulletin of World Health Organisation* **82**(4), 242. 45
- Lee, J.-P. & Yu, M.-T. (2002), ‘Pricing default-risky cat bonds with moral hazard and basis risk’, *Journal of Risk and Insurance* **69**(2), 25–44. 31
- Lee, R. D. & Carter, L. R. (1992), ‘Modelling and forecasting u.s. mortality’, *Journal of the American statistical association* **63**(12-57). 30, 35, 40
- Lin, Y. & Cox, S. H. (2006), Securitization of catastrophe mortality risks. Youngstown State University. 34, 35, 36
- Linfoot, A. (2007), Financing catastrophic risk : Mortality bond case study, in ‘Présentation de Scottish Re’. 41, 42, 45, 55
- McGhee, C., Clarke, R. & Collura, J. (2007), Ripples into waves :the catastrophe bond market at year-end 2006, Technical report, Guy Carpenter. 12, 13
- Ménioux, J.-C. (2008), Workshop on mortality and longevity risks, in ‘Présentation d’Axa’. 25
- R Development Core Team (2008), *R : A Language and Environment for Statistical Computing*, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0.  
**URL:** <http://www.R-project.org> 43
- Shube, B., Bartholomew, D., Kenessey, Z., Davies, S., Hall, P., Steutel, F., van Ham, K., Daley, D., Gani, J., Bagdonavi, V., Nikulin, M. & Jensen, D. (1997), *Advances in the Theory and Practice of Statistics : A Volume in Honor of Samuel Kotz*, Johnson, N. L. and Balakrishnan, N. 45
- Vasicek, O. (1977), ‘An equilibrium characterisation of the term structure’, *Journal of financial economics* **5**, 177–188. 30

- Wang, S. S. (1996), 'Premium calculation by transforming the layer premium density', *Astin Bulletin* **26**(1), 71–92. 33
- Wang, S. S. (2000), 'A class of distortion operations for pricing financial an insurance risk', *Journal of Risk and Insurance* **67**(1), 15–36. 33
- Wang, S. S. (2001), 'A universal framework for pricing financial and insurance risks', *In XI th AFIR proceedings* pp. 679–703. 33
- Wang, S. S. (2002), 'A universal framework for pricing financial and insurance risks', *Astin Bulletin* **32**(2), 213–234. 33
- Wang, S. S. (2004), 'Cat bond pricing using probability transforms', *Geneva Papers* (278), 19–29. 33, 34, 35
- Wang, S. S. (2007), 'Normalized exponential tilting : Pricing and measuring multivariate risks', *North American Actuarial Journal* . 36
- Zeng, L. (2000), 'On the basis risk of industry loss warranties', *Journal of Risk and Insurance* . 12

# Webographie

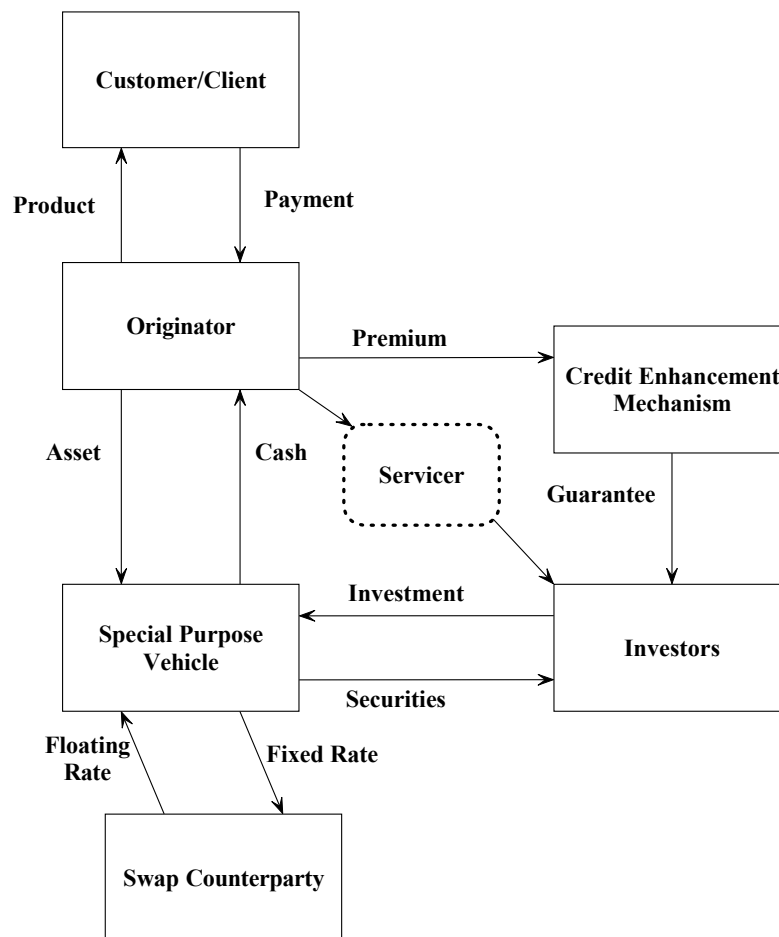
- Association de l'Economie Financière  
<http://www.aef.asso.fr/parution.jsp?prm=402>
- Center for Disease Control and prevention  
<http://www.cdc.gov/DataStatistics/>
- Derivatives Strategy - Preparing for catastrophes  
<http://www.derivativesstrategy.com/magazine/archive/1998/1198fea3.asp>
- Human Mortality Database  
<http://www.mortality.org/>
- Nombre de morts dans les guerres, les catastrophes et les accidents  
<http://www.geocities.com/dtmcbride/hist/disasters-war.html>
- Titrisation au Luxembourg  
<http://www.titrisation.org/>

# Annexe A

## Structure de titrisation d'un ABS

Le schéma est tiré de Cummins (2004).

**Figure 1: Structure of An Asset-Backed Security**



## Annexe B

# Une liste (non exhaustive) de titrisations

Voici une liste brève des opérations de titrisation réalisées depuis 2005. Cette liste est tirée de l'étude Sigma - Helfenstein (2006). Gorvett (1999) et Canabarro et al. (2000) propose des listes d'opérations plus anciennes.

Tableau 8  
Opérations de titrisation dans l'assurance vie depuis 2005, hors placements privés

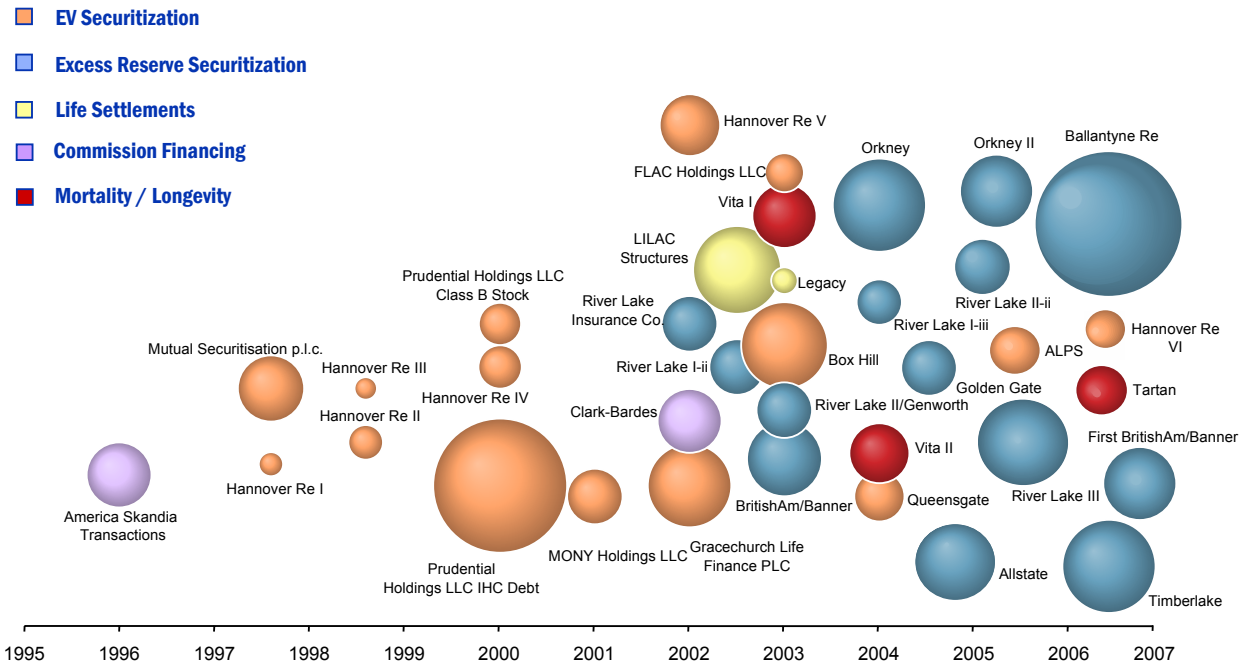
Sponsor	Structure <i>ad hoc</i>	Date d'émission	Echéance (années)	Taille en millions USD	Note	Couverture
Banner Life	Potomac Trust Capital	05/01/2005	20	49	AAA/Aaa	Régime XXX
Banner Life	Potomac Trust Capital	10/01/2005	20	49	AAA/Aaa	Régime XXX
Swiss Re	Queensgate	12/01/2005	20	175	A+/A1	Valeur intrinsèque
Swiss Re	Queensgate	12/01/2005	20	45	BBB/Baa1	Valeur intrinsèque
Swiss Re	Queensgate	12/01/2005	20	25	BB/Ba1	Valeur intrinsèque
Genworth	INC Money Markets	19/01/2005	30	100	AAA/Aaa	Régime XXX
Banner Life	Potomac Trust Capital	24/01/2005	20	49	AAA/Aaa	Régime XXX
Banner Life	Potomac Trust Capital	24/01/2005	20	49	AAA/Aaa	Régime XXX
Genworth	INC Money Markets	28/01/2005	30	100	AAA/Aaa	Régime XXX
LILAC	Patrons' Legacy	01/02/2005	19	100		
Scottish Re	Orkney Holdings	04/02/2005	30	850	AAA/Aaa	Régime XXX
Banner Life	Potomac Trust Capital	06/02/2005	20	49	AAA/Aaa	Régime XXX
Swiss Re	Vita Capital II Ltd.	13/04/2005	5	62	A-/Aa3	Surmortalité
Swiss Re	Vita Capital II Ltd.	13/04/2005	5	200	BBB+/A2	Surmortalité
Swiss Re	Vita Capital II Ltd.	13/04/2005	5	100	BBB-/Baa2	Surmortalité
Genworth	INC Term Securities	09/06/2005	28	200	AAA/Aaa	Régime XXX
Genworth	INC Term Securities	04/10/2005	30	300	AAA/Aaa	Régime XXX
Scottish Re	Orkney Re II	21/12/2005	30	383	AAA/Aaa	Régime XXX
Scottish Re	Orkney Re II	21/12/2005	30	43	A-/Aa2	Régime XXX
Scottish Re	Orkney Re II	21/12/2005	30	30	BBB+/Baa2	Régime XXX
Swiss Re	ALPS Capital II	23/12/2005	20	220	AAA/Aaa	Valeur intrinsèque
Swiss Re	ALPS Capital II	23/12/2005	20	90	AAA/Aaa	Valeur intrinsèque
Swiss Re	ALPS Capital II	23/12/2005	20	30	BBB/Baa1	Valeur intrinsèque
Swiss Re	ALPS Capital II	23/12/2005	20	30	BB/Ba1	Valeur intrinsèque
Scottish Re	Tartan Capital	04/05/2006	3	75	Aaa/AAA	Surmortalité
Scottish Re	Tartan Capital	04/05/2006	3	80	Baa3/BBB	Surmortalité
Scottish Re	Ballantyne Re	02/05/2006	30	250	Aa2/A-/AA	Régime XXX
Scottish Re	Ballantyne Re	02/05/2006	30	500	Aaa/AAA/AAA	Régime XXX
Scottish Re	Ballantyne Re	02/05/2006	30	500	Aa1/AAA/AAA	Régime XXX
Scottish Re	Ballantyne Re	02/05/2006	30	400	Aaa/AAA/AAA	Régime XXX
Scottish Re	Ballantyne Re	02/05/2006	30	10	Baa1/BBB+/BBB+	Régime XXX
Scottish Re	Ballantyne Re	02/05/2006	30	40	Baa1/BBB+/BBB+	Régime XXX
Scottish Re	Ballantyne Re	02/05/2006	30	50	NR/NR/NR	Régime XXX
RGA	Timberlake Financial	28/06/2006	30	850	AAA/Aaa	Régime XXX

Tableau 9

## Opérations de titrisation dans l'assurance non-vie depuis 2005, hors placements privés

Sponsor	Structure <i>ad hoc</i>	Date d'émission	Date d'échéance	Taille en millions USD	Note	Déclencheur	Risque
Swiss Re	Arbor I Series VIII	3/15/2005	3/15/2007	20	B	Indice paramétrique	Multirisques
USAA	Residential Re 2005 Class A	5/31/2005	6/6/2008	91	BB	Indemnitaire	Multirisques
USAA	Residential Re 2005 Class B	5/31/2005	6/6/2008	85	B	Indemnitaire	Multirisques
FM Global	Cascadia	6/7/2005	6/13/2008	300	BB+/BB+	Paramétrique pur	Séisme Nord-Ouest du Pacifique
Swiss Re	Arbor I Series IX	6/15/2005	6/15/2007	25	B	Indice paramétrique	Multirisques
OCIL	Avalon Re Class A2	6/30/2005	6/6/2008	135	B+/BB-	Indemnitaire	Accident du travail
OCIL	Avalon Re Class B	6/30/2005	6/6/2008	135	CCC/CCC	Indemnitaire	Accident du travail
OCIL	Avalon Re Class C	6/30/2005	6/6/2008	135	CCC-/CCC-	Indemnitaire	Accident du travail
Zurich American*	KAMP Re	7/28/2005	12/14/2007	190	CC	Indemnitaire	Multirisques
PXRE	Atlantic&Western Re Class A	11/8/2005	11/15/2010	100	BB+/BB	Sinistres modélisés	Multirisques
PXRE	Atlantic&Western Re Class B	11/8/2005	11/15/2010	200	B+/B	Sinistres modélisés	Multirisques
Munich Re	Aiolos	11/18/2005	4/8/2009	130	BB+	Paramétrique pur	Tempête Europe
AXA	FCC SPARC Class A	12/9/2005	7/15/2011	126	AAA/AAA	sans objet	Auto
AXA	FCC SPARC Class B	12/9/2005	7/15/2011	76	AA	sans objet	Auto
AXA	FCC SPARC Class C	12/9/2005	7/15/2011	32	BBB/BBB-	sans objet	Auto
Swiss Re	Arbor I Series X	12/15/2005	12/15/2006	18	B	Indice paramétrique	Multirisques
PXRE	Atlantic&Western Re II Class B	12/21/2005	1/9/2009	125	BB+	Sinistres modélisés	Multirisques
PXRE	Atlantic&Western Re II Class A	12/21/2005	1/9/2007	125	BB+	Sinistres modélisés	Multirisques
Montpelier Re	Champlain Re Class A	12/22/2005	1/7/2009	75	BB-	Sinistres modélisés	Multirisques
Montpelier Re	Champlain Re Class B	12/22/2005	1/7/2009	15	B+/B-	Sinistres modélisés	Multirisques
Swiss Re	Crystal Credit Class A	1/13/2006	12/31/2008	131	BBB-/Baa2	sans objet	Réassurance crédit
Swiss Re	Crystal Credit Class B	1/13/2006	12/31/2008	98	BB/Baa2	sans objet	Réassurance crédit
Swiss Re	Crystal Credit Class C	1/13/2006	12/31/2008	76	B/B2	sans objet	Réassurance crédit
Swiss Re	Australis	1/26/2006	2/3/2009	100	BB	Indice paramétrique	Multirisques
Tiers non divulgué *	Redwood VII	2/9/2006	1/9/2008	160	BB+	Indice sectoriel	Séisme Californie
Tiers non divulgué *	Redwood VIII	2/9/2006	1/9/2008	65	BB+	Indice sectoriel	Séisme Californie
Hartford Fire	Foundation Re Class D	2/17/2006	2/24/2010	105	BB	Indice sectoriel	Multirisques
FONDEN*	CAT-Mex Class A	5/11/2006	5/19/2009	150	BB+	Paramétrique pur	Séisme Mexique
FONDEN*	CAT-Mex Class B	5/11/2006	5/19/2009	10	BB+	Paramétrique pur	Séisme Mexique

Voilà un graphique des titrisations vie depuis 1995 : attention au type de titrisation. Sont représentées sur ce graphe les titrisations d' "embedded value", d' "excess reserve", de "life settlements", de "commission financing" et de mortalité (source Linfoot (2007)).



## Annexe C

# Les processus de Poisson doublement stochastiques

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé. Soit  $(N_t)_t$  un processus ponctuel adapté à une filtration  $\mathcal{F}_t$  et  $(\lambda_t)_t$  un processus positif et mesurable.  $(N_t)_t$  est un processus de Poisson doublement stochastique si

$$\forall 0 \leq s \leq t, \forall u \in \mathbb{R}, \quad E[e^{iu(N_t - N_s)} | \mathcal{F}_s] = \exp \left[ (e^{iu} - 1) \int_s^t \lambda_v dv \right].$$

# Annexe D

## Calibration du modèle affine

Le graphique de l'ajustement log-linéaire en 0 (i.e. 1946) et l'estimation du processus  $(Y_t)_t$  sont tracés sur les figures infra.

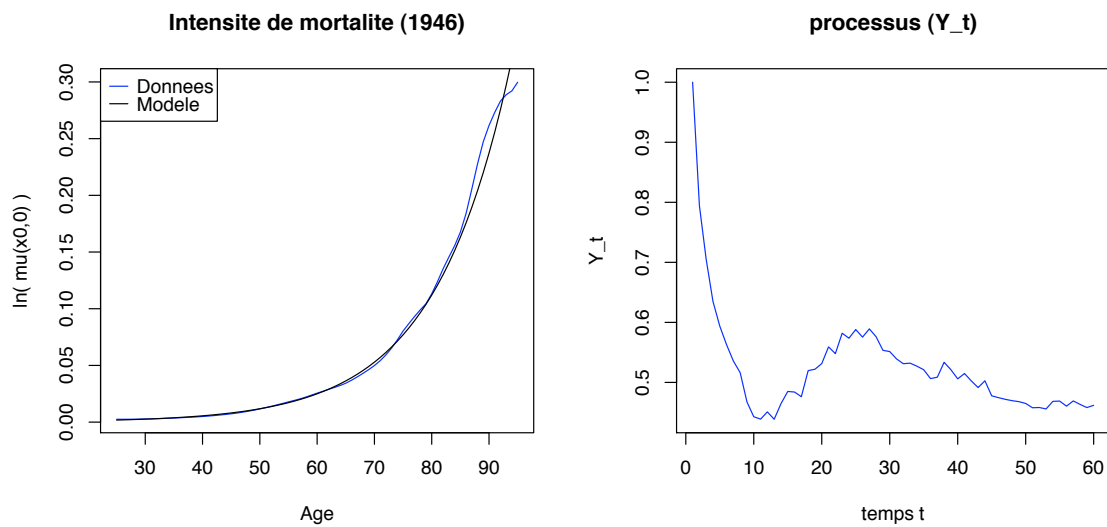


FIG. D.1 – Calibration pour les taux de mortalité des hommes

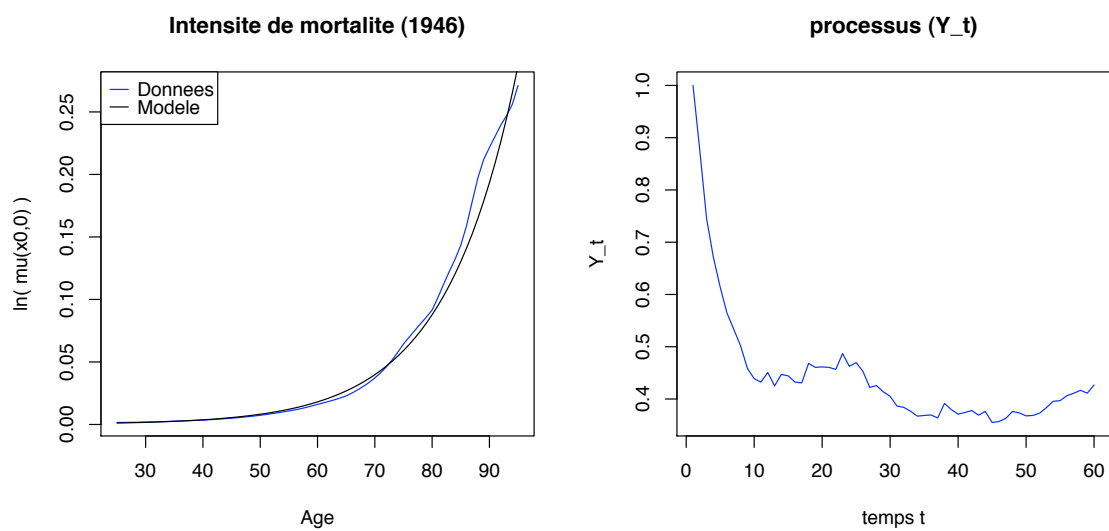


FIG. D.2 – Calibration pour les taux de mortalité des femmes

## Annexe E

# Equations Différentielles Ordinaires de Riccati

Ce sont des équations du type

$$y' = a + by + cy^2,$$

où  $a$ ,  $b$  et  $c$  peuvent être des fonctions de  $x$ . Dans notre cas, on a

$$y' = -1 - (\alpha - b)y + K \underbrace{e^{-bx}}_{q_2(x)} y^2, \quad (\text{E.1})$$

où la constante  $K$  est définie par  $\frac{\sigma^2}{2}e^{b(x_0+T)+c}$ . En utilisant l'astucieux changement de variable proposé page 23 de Ince (1956) :  $v(x) = y(x)Kq_2(x)$ , on supprime le coefficient devant le carré de  $y$

$$v' = v^2 + v \left( -\alpha + b + \frac{q_2'}{q_2} \right) - q_2.$$

Puis en posant  $v = -\frac{u'}{u}$ , on obtient une équation différentielle du second ordre :

$$u'' + \alpha u' - K e^{-bx} u = 0, \quad (\text{E.2})$$

et la solution en  $y$  s'obtient par  $-\frac{u'}{uq_2}$ . Le problème est que ce n'est pas une équation différentielle linéaire (i.e. avec des coefficients constants). Il n'existe pas de méthodes générales pour trouver une solution particulière à cette dernière équation. Cependant, si on est capable d'avoir une solution particulière, alors la méthode de variation de la constante nous donnera une solution générale.

Après avoir cherché en vain des solutions du type  $\omega e^{\mu x + \gamma}$ ,  $e^{\gamma e^{-bx} + \mu}$  ou encore  $e^{\gamma e^{-bx} + \mu x}$ , on a finalement utilisé l'approximation  $e^{-bx} = 1 + O(1)$ . Ceci est justifiable par le fait que  $\hat{b}$  est "petit" et  $x$  prends des valeurs dans  $\{1, 2, 3\}$ . Ainsi l'équation (E.2) devient

$$u'' + \alpha u' - Ku = 0,$$

qui a pour équation caractéristique

$$X^2 + \alpha X - K = 0.$$

Les racines (réelles) sont  $r_1 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4K}}{2}$  et  $r_2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4K}}{2}$ . Les solutions sont donc  $\gamma e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ . La solution de (E.1) est donc

$$y = -\frac{u'}{uq_2} = -\frac{\gamma r_1 e^{r_1 x} + \mu r_2 e^{r_2 x}}{K e^{-bx} (\gamma e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x})}$$

Cette fonction est notée  $g$  dans le chapitre 3. Il ne nous reste plus qu'à trouver la fonction  $f$  vérifiant l'équation

$$f' = -\frac{2\alpha\beta}{\sigma^2} \times \frac{\gamma r_1 e^{r_1 x} + \mu r_2 e^{r_2 x}}{\gamma e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}}.$$

Heureusement, on peut résoudre explicitement cette équation :

$$f(x) = -\frac{2\alpha\beta}{\sigma^2} \ln |\gamma e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}|.$$

Les conditions initiales  $f(0) = g(0) = 0$  entraînent que

$$\begin{cases} \gamma + \mu = 1 \\ \gamma r_1 + \mu r_2 = 0 \end{cases}.$$

On aboutit à

$$\begin{cases} \mu = \frac{r_1}{r_1 - r_2} \\ \gamma = 1 - \frac{r_1}{r_1 - r_2} \end{cases}.$$

*“La crise des subprime ne sert qu'à masquer le dernier retrait de cash de Chuck Norris.”*  
citation tirée de [www.chucknorrisfacts.fr](http://www.chucknorrisfacts.fr).

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Bilan des opérations passées</b>	<b>9</b>
1.1 Titrisation des risques non vie . . . . .	9
1.1.1 Structure d'émission . . . . .	9
1.1.2 Instruments . . . . .	11
1.1.3 Avantages et inconvénients . . . . .	13
1.1.4 Exemples de titrisations . . . . .	16
1.2 Titrisation des risques vie . . . . .	19
1.2.1 Structure d'émission . . . . .	19
1.2.2 Instruments . . . . .	20
1.2.3 Avantages et inconvénients . . . . .	21
1.2.4 Exemples de titrisations . . . . .	23
<b>2 Panorama des méthodes d'évaluation</b>	<b>27</b>
2.1 Modèles à intensité . . . . .	27
2.1.1 Application aux "cat bond" . . . . .	27
2.1.2 Applications aux "mortality" ou "longevity bond" . . . . .	29
2.2 Modèles structurels . . . . .	30
2.2.1 Modèle en temps discret . . . . .	31

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	63
2.2.2	Modèle en temps continu . . . . . 31
2.3	Evaluation à l'aide de transformées de probabilités . . . . . 32
2.3.1	Application aux cat bond . . . . . 33
2.3.2	Application au risque de mortalité . . . . . 34
2.3.3	Application au risque de longévité . . . . . 35
2.3.4	La perturbation exponentielle . . . . . 36
2.4	Evaluation à l'aide de fonctions d'utilité . . . . . 37
2.4.1	Fonctions de préférence . . . . . 37
2.4.2	Mesures de risques . . . . . 37
<b>3</b>	<b>Calibration d'un modèle à mortalité stochastique</b> . . . . . <b>40</b>
3.1	Présentation de la titrisation Tartan . . . . . 40
3.2	Présentation du modèle . . . . . 42
3.3	Calibration . . . . . 43
3.3.1	Calibration de la composante principale . . . . . 44
3.3.2	Calibration de la composante "catastrophe" . . . . . 44
3.4	Résultat : comparaison avec les "spreads" observés . . . . . 45
	<b>Conclusion</b> . . . . . <b>47</b>
	<b>Bibliographie</b> . . . . . <b>48</b>
	<b>Webographie</b> . . . . . <b>52</b>
	<b>Annexes</b> . . . . . <b>53</b>
	<b>A Structure de titrisation d'un ABS</b> . . . . . <b>53</b>
	<b>B Une liste (non exhaustive) de titrisations</b> . . . . . <b>54</b>

<b>C</b>	<b>Les processus de Poisson doublement stochastiques</b>	<b>57</b>
<b>D</b>	<b>Calibration du modèle affine</b>	<b>58</b>
<b>E</b>	<b>Equations Différentielles Ordinaires de Riccati</b>	<b>60</b>