



ETUDE DES MARCHÉS D'ASSURANCE NON-VIE À L'AIDE
D'ÉQUILIBRES DE NASH ET DE MODÈLES DE RISQUES AVEC
DÉPENDANCE

THÈSE SOUS LA DIRECTION DE STÉPHANE LOISEL ET VÉRONIQUE
MAUME-DESCHAMPS

Christophe Dutang

ISFA, Université Lyon 1 et AXA Group Risk Management

31 Mai 2012

PLAN

1 INTRODUCTION

2 MODÈLE DE MARCHÉ

- Modèle sur une période
- Modèle sur plusieurs périodes

3 MODÈLE DE RISQUE

- Modèle en temps continu
- Modèle en temps discret

4 CONCLUSION

PLAN

1 INTRODUCTION

2 MODÈLE DE MARCHÉ

- Modèle sur une période
- Modèle sur plusieurs périodes

3 MODÈLE DE RISQUE

- Modèle en temps continu
- Modèle en temps discret

4 CONCLUSION

INTRODUCTION

Marché de l'assurance :

- En échange d'une prime versée à l'assureur, l'assuré va transférer tout ou partie de son risque.
- En contrepartie, l'assureur versera une compensation à l'assuré si un certain type de sinistre survient.

Dans cette présentation, on s'intéresse à modéliser les primes et les sinistres :

- Comment prendre en compte la compétition ?
- Comment intégrer la dépendance entre sinistres ?

THÈSE BASÉE SUR 5 ARTICLES



C. Dutang, Hansjoerg Albrecher, and S. Loisel, *A game to model non-life insurance market cycles*, Working paper, ISFA, 2012.



_____, *A game to model non-life insurance markets*, submitted to European Journal of Operation Research, 2012.



C. Dutang, C. Lefèvre, and S. Loisel, *A new asymptotic rule for the ultimate ruin probability*, submitted to Insurance: Mathematics and Economics, 2012.



C. Dutang, *A survey of GNE computation methods: theory and algorithms*, Working paper, ISFA, 2012.



_____, *The customer, the insurer and the market*, submitted to Bulletin Français d'Actuariat, 2012.

PLAN

1 INTRODUCTION

2 MODÈLE DE MARCHÉ

- Modèle sur une période
- Modèle sur plusieurs périodes

3 MODÈLE DE RISQUE

- Modèle en temps continu
- Modèle en temps discret

4 CONCLUSION

CONTEXTE ET ÉTAT DE L'ART

La prise en compte de la compétition consiste traditionnellement à

- 1 Modéliser le cycle de marché : séries chronologiques,
- 2 Modéliser les résiliations et les affaires nouvelles : modèles de régression,
- 3 Se positionner par rapport au prix marché estimé : contrôle optimal.

CONTEXTE ET ÉTAT DE L'ART

La prise en compte de la compétition consiste traditionnellement à

- 1 Modéliser le cycle de marché : séries chronologiques,
- 2 Modéliser les résiliations et les affaires nouvelles : modèles de régression,
- 3 Se positionner par rapport au prix marché estimé : contrôle optimal.

La théorie des jeux – le dilemme du prisonnier :

- Deux suspects à qui on propose de passer aux aveux.
- Si un des deux prisonniers dénonce l'autre, il est libéré et l'autre écoperà de 10 ans.
- Si les deux se dénoncent, ils seront condamnés à 5 ans.
- Enfin, si aucun ne se dénonce, la peine sera réduite à 6 mois.

Les coûts des joueurs sont représentés par la double matrice suivante.

J1 J2	se tait (T)	dénonce (D)
se tait (T)	$(-1/2, -1/2)$	$(-10, 0)$
dénonce (D)	$(0, -10)$	$(-5, -5)$

Chaque joueur va chercher à minimiser sa peine potentielle

⇒ (D,D) est un *équilibre de Nash*, c.a.d. couple de stratégies telles qu'aucun joueur ne peut diminuer son coût unilatéralement.

MODÈLE SIMPLE – MODÈLE DE RÉSILIATION

Considérons I assureurs sur un marché de n assurés. Soit $x \in [\underline{x}, \overline{x}]^I$ les prix. Le choix C_i de l'assuré i suit une loi multinomiale $\mathcal{M}_I(1, p_{j \rightarrow}(x))$ où $p_{j \rightarrow}(x) = (p_{j \rightarrow 1}(x), \dots, p_{j \rightarrow I}(x))$ et j est l'assureur de i par le passé.

- La probabilité $P(C_i = k; j) = p_{j \rightarrow k}(x)$ a pour expression

$$p_{j \rightarrow k}(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \sum_{l \neq j} e^{f_l(x_j, x_l)}} & \text{si } j = k, \\ \frac{e^{f_j(x_j, x_k)}}{1 + \sum_{l \neq j} e^{f_l(x_j, x_l)}} & \text{si } j \neq k, \end{cases} \quad (1)$$

où la fonction $f_j(x_j, x_l)$ représente la sensibilité au prix

$$\bar{f}_j(x_j, x_l) = \mu_j + \alpha_j \frac{x_j}{x_l} \text{ et } \tilde{f}_j(x_j, x_l) = \tilde{\mu}_j + \tilde{\alpha}_j (x_j - x_l).$$

- La taille de portefeuille de l'assureur j est

$$N_j(x) = B_{jj}(x) + \sum_{k=1, k \neq j}^I B_{kj}(x).$$

où $B_{kj} \sim \mathcal{B}(n_k, p_{k \rightarrow j}(x))$ et n_k est la taille de portefeuille initiale.

MODÈLE SIMPLE – MODÈLE DE SINISTRES

Considérons un modèle fréquence – sévérité pour les sinistres.

- Ainsi, le sinistre de l'assuré i a pour expression

$$Y_i = \sum_{l=1}^{M_i} Z_{i,l},$$

où M_i est le nombre de sinistres, $(Z_{i,l})_l$ les montants et $M_i \perp Z_{i,l}$.

- Hypothèse : indépendance des sinistres $(Y_i)_i$

- La perte totale de l'assureur j est

$$S_j(x) = \sum_{i=1}^{N_j(x)} Y_i.$$

- Deux modèles de sinistres sont considérés : Poisson – lognormal (PLN) et binomial négative – lognormal (NBLN).

MODÈLE SIMPLE – FONCTION OBJECTIF

Le choix de la fonction objectif $x \mapsto O_j(x)$ se justifie par

- des critères économiques : pour x_{-j} donné, $x_j \mapsto O_j(x)$ doit être décroissante en x_j et dépendre d'une prime seuil π_j ,
- des conditions mathématiques : $x_j \mapsto O_j(x)$ doit être strictement concave.

On choisit

$$O_j(x) = \frac{n_j}{n} \left(1 - \beta_j \left(\frac{x_j}{m_j(x)} - 1 \right) \right) (x_j - \pi_j) \quad (2)$$

- où la prime seuil π_j et la prime moyenne marché $m_j(x)$ ont pour expression

$$\pi_j = \omega_j \bar{a}_{j,0} + (1 - \omega_j) \bar{m}_0 \text{ et } m_j(x) = \frac{1}{I-1} \sum_{k \neq j} x_k.$$

- $\bar{a}_{j,0}$, $\bar{m}_0$, ω_j représentent la prime actuarielle moyenne, la prime marché moyenne et le facteur de crédibilité, respectivement.
- Un modèle sans prise en compte de la compétition serait $O_j(x) = O_j(x_j)$.

MODÈLE SIMPLE – CONTRAINTE DE SOLVABILITÉ

On souhaite une fonction $x_j \mapsto g_j^1(x_j)$ explicite et concave.

- On choisit une contrainte de solvabilité

$$K_j + n_j(x_j - \pi_j)(1 - e_j) \geq k_{99.5\%}\sigma(Y)\sqrt{n_j},$$

où e_j est le taux de frais et $k_{99.5\%}$ est le coefficient tel que

$$E(Y)n_j + k_{99.5\%}\sigma(Y)\sqrt{n_j} \approx \text{VaR}_{99.5\%}\left(\sum_{i=1}^{n_j} Y_i\right).$$

En pratique, on prend $k_{99.5\%} = 3$.

- Ainsi, la fonction contrainte g_j est définie par

$$\begin{aligned} g_j^1(x_j) &= \frac{K_j + n_j(x_j - \pi_j)(1 - e_j)}{k_{99.5\%}\sigma(Y)\sqrt{n_j}} - 1 \\ g_j^2(x_j) &= x_j - \underline{x} \\ g_j^3(x_j) &= \bar{x} - x_j \end{aligned} \tag{3}$$

MODÈLE SIMPLE – SÉQUENCE DE JEU

Sur une période, le jeu se déroule comme suit.

- 1 Les assureurs fixent leur prime selon un équilibre de Nash en résolvant pour tout $j \in \{1, \dots, I\}$

$$x_{-j} \mapsto \arg \max_{x_j, g_j(x_j) \geq 0} O_j(x_j, x_{-j}).$$

- 2 Les assurés choisissent aléatoirement leur nouvel assureur selon $p_{k \rightarrow j}(x^*)$: on obtient $N_j(x^*)$.
- 3 Pour l'année de couverture, les sinistres $S_j(x^*)$ sont simulés aléatoirement selon un modèle fréquence – sévérité et leur taille de portefeuille.
- 4 Le résultat de souscription est déterminé

$$UW_j(x^*) = N_j(x^*)x_j^*(1 - e_j) - S_j(x^*).$$

MODÈLE SIMPLE – PROPRIÉTÉS

PROPOSITION ([DAL12B])

Le jeu d'assurance considéré avec des fonctions objectif et contrainte définies par (2) et (3), respectivement, admet un unique équilibre de Nash.

ELÉMENTS DE PREUVE.

O_j continue + $x_j \mapsto O_j(x)$ quasiconcave $\Rightarrow$ existence,
 $x_j \mapsto O_j(x)$ strictement concave $\Rightarrow$ unicité.



PROPOSITION ([DAL12B])

Soit x^ la prime d'équilibre du jeu à I assureurs. Pour tout joueur j , si $x_j^* \in]\underline{x}, \bar{x}[$, la prime d'équilibre x_j^* dépend des paramètres de la manière suivante :*

- *elle croît avec la prime seuil π_j , la contrainte de solvabilité $k_{99.5\%}$, la volatilité des sinistres $\sigma(Y)$, le taux de frais e_j ;*
- *et décroît avec le paramètre de sensibilité β_j et le capital K_j .*

Sinon la prime d'équilibre x_j^ est indépendante de tous les paramètres.*

ELÉMENTS DE PREUVE.

Conditions KKT + théorème des fonctions implicites



MODÈLE SIMPLE – RÉSULTATS NUMÉRIQUES

Considérons un jeu à trois joueurs avec 10000 clients, i.e. $n = 10000$, $I = 3$. De plus, $(n_1, n_2, n_3) = (4500, 3200, 2300)$ et K_i tel que ratio de couverture = 133%.

	P1	P2	P3	market	$E(X)$	$\sigma(X)$
PLN	1.129	1.227	1.029	1.190	1	4.472
NBLN	1.142	1.258	1.095	1.299	1	9.487

TABLE: Prime actuarielle $\bar{a}_{j,0}$ et marché $\bar{m}_0$

Les primes d'équilibre sont données dans le tableau suivant.

	x_1^*	x_2^*	x_3^*	$\Delta \hat{N}_1$	$\Delta \hat{N}_2$	$\Delta \hat{N}_3$
PLN-ratio	1.612	1.583	1.531	-258.5	-43.4	301.9
PLN-diff	1.659	1.621	1.566	-382.8	-38.4	421.2
NBLN-ratio	1.727	1.697	1.648	-239.4	-35.3	274.7
NBLN-diff	1.777	1.738	1.685	-385.4	-29.6	415.0

TABLE: Prime d'équilibre

MODÈLE COMPLEXE – CHANGEMENTS APPORTÉS

Une meilleure prise en compte de N_j : son espérance $\hat{N}_j(x)$ est donnée par

$$\hat{N}_j(x) = n_j \times p_{j \rightarrow j}(x) + \sum_{l \neq j} n_l \times p_{l \rightarrow j}(x).$$

On choisit les fonctions suivantes

- la fonction objectif

$$\tilde{O}_j(x) = \frac{n_j p_{j \rightarrow j}(x)}{n} (x_j - \pi_j), \quad (4)$$

- la contrainte de solvabilité

$$\tilde{g}_j^1(x) = \frac{K_j + n_j(x_j - \pi_j)(1 - e_j)}{k_{99.5\%}\sigma(Y)\sqrt{\hat{N}_j(x)}} - 1. \quad (5)$$

MODÈLE COMPLEXE – PROPRIÉTÉS

PROPOSITION ([DAL12B])

Le jeu d'assurance considéré avec des fonctions objectif et contrainte définies par (4) et (5), respectivement, admet un équilibre de Nash généralisé, si pour tout joueur $j = 1, \dots, I$, $\tilde{g}_j^1(\bar{x}) > 0$.

PROPOSITION ([DAL12B])

Soit x^ la prime d'équilibre du jeu à I assureurs. Pour tout joueur j , si $x_j^* \in]\underline{x}, \bar{x}[$, la prime d'équilibre x_j^* dépend des paramètres de la manière suivante :*

- *elle croît avec la prime seuil π_j , la contrainte de solvabilité $k_{99.5\%}$, la volatilité des sinistres $\sigma(Y)$, le taux de frais e_j ;*
- *et décroît avec les paramètres de résiliation μ_j , α_j et le capital K_j .*

Sinon, la prime d'équilibre x_j^ est indépendante de tous les paramètres.*

PARAMÉTRAGE DYNAMIQUE

Considérons le volume de prime $\text{GWP}_{j,t}$, la taille de portefeuille $n_{j,t}$, le capital $K_{j,t}$ pour le joueur j en t .

- Au début de chaque période, on détermine

$$\bar{m}_{t-1} = \frac{1}{d} \sum_{u=1}^d \frac{\sum_{j=1}^N \text{GWP}_{j,t-u} \times x_{j,t-u}^*}{\text{GWP}_{.,t-u}} \text{ et } \bar{a}_{j,t} = \frac{1}{1 - e_{j,t}} \frac{1}{d} \sum_{u=1}^d \frac{s_{j,t-u}}{n_{j,t-u}}.$$

Ainsi, on a $\pi_{j,t} = \omega_j \bar{a}_{j,t} + (1 - \omega_j) \bar{m}_{t-1}$.

- Les fonctions objectif et contrainte deviennent

$$O_{j,t}(x) = \frac{n_{j,t}}{n} \left(1 - \beta_{j,t} \left(\frac{x_j}{m_j(x)} - 1 \right) \right) (x_j - \pi_{j,t}),$$

$$g_{j,t}^1(x_j) = \frac{K_{j,t} + n_{j,t}(x_j - \pi_{j,t})(1 - e_{j,t})}{k_{995}\sigma(Y)\sqrt{n_{j,t}}} - 1.$$

- Paramètres mis à jour sur le principe 'leader in turn' en se basant sur le volume de prime $\text{GWP}_{j,t}$: frais $e_{j,t}$, sensibilité $\beta_{j,t}$, résilience $\mu_{j,t}$, $\alpha_{j,t}$.

MODÈLE SIMPLE RÉPÉTÉ – SÉQUENCE DE JEU

Pour la période t , le jeu se déroule comme suit.

- 1 Les assureurs maximisent leur fonction objectif

$$\sup_{x_{j,t}} O_{j,t}(x_{j,t}, x_{-j,t}) \text{ tel que } g_{j,t}(x_{j,t}) \geq 0.$$

- 2 Une fois la prime d'équilibre x_t^* déterminée, les assurés résilient ou renouvellent. On obtient une réalisation $n_{j,t}^*$ de $N_{j,t}(x^*)$.
- 3 La perte agrégée $S_{j,t}$ est simulée selon un modèle de sinistre : PLN ou NBLN. On obtient $s_{j,t}$.
- 4 Le résultat de souscription de l'assureur j est ensuite déterminé

$$UW_{j,t} = n_{j,t}^* \times x_{j,t}^* \times (1 - e_j) - s_{j,t}.$$

- 5 Enfin, le capital est donné par

$$K_{j,t} = K_{j,t-1} + UW_{j,t}.$$

Le joueur j est dit ruiné si $K_{j,t} < 0$ ou $n_{j,t}^* = 0$

MODÈLE SIMPLE RÉPÉTÉ – PROPRIÉTÉS

PROPOSITION ([DAL12A])

Pour le jeu sur une période, si $\forall k \neq j, x_{j,t} \leq x_{k,t}$ et $x_{j,t}(1 - e_{j,t}) \leq x_{k,t}(1 - e_{k,t})$, alors les résultats de souscription par police $uw_{j,t}$ est ordonné stochastiquement $uw_{j,t} \leq_{icx} uw_{k,t}$.

ELÉMENTS DE PREUVE.

Ordre de ‘majorization’ et propriétés des ordres convexes. □

PROPOSITION ([DAL12A])

Pour le jeu infiniment répété, la probabilité qu’il y ait au moins deux assureurs non ruinés au temps t décroît géométriquement avec t .

ELÉMENTS DE PREUVE.

Majoration de la probabilité $P(\text{Card}(I_t) > 1)$. □

MODÈLE SIMPLE RÉPÉTÉ – EXEMPLE DE TRAJECTOIRE

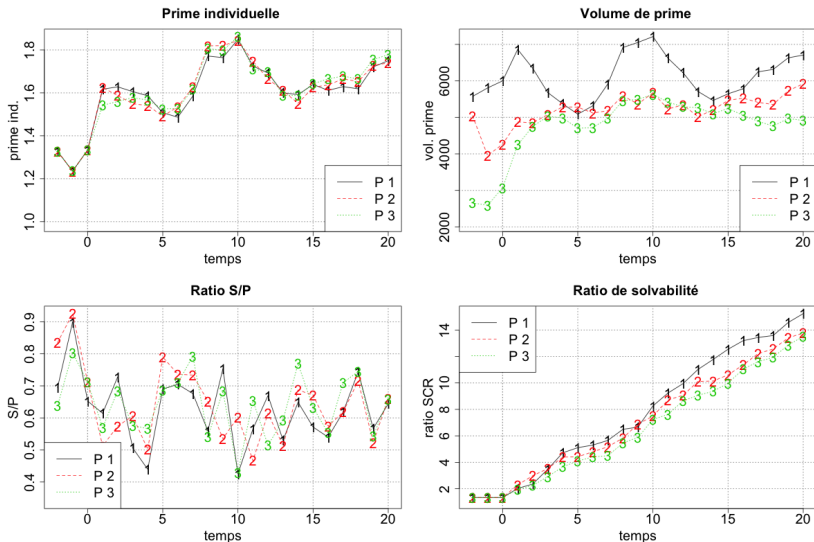


FIGURE: Modèle de sinistre NBLN et sensibilité $\tilde{f}_j$

PROBABILITÉ EMPIRIQUE D'ÊTRE LEADER

Simulation de $2^{14} \approx 16000$ trajectoires sur $T = 20$ périodes.

	Ruine avant $t = 10$	Ruine avant $t = 20$	Leader en $t = 5$	Leader en $t = 10$	Leader en $t = 20$
Assureur 1	6.1e-05	6.1e-05	0.593	0.381	0.331
Assureur 2	0	0	0.197	0.308	0.329
Assureur 3	0.000244	0.000244	0.21	0.312	0.34

TABLE: Probabilités de ruine et de domination

	Min.	1st Qu.	Mediane	Moy.	3rd Qu.	Max.
Assureur 1	-0.7905	0.2309	0.3617	0.3563	0.4869	1.2140
Assureur 2	-0.4340	0.2279	0.3600	0.3555	0.4869	1.1490
Assureur 3	-0.4730	0.2308	0.3627	0.3563	0.4871	1.0950

TABLE: Résultat de souscription par police en $t = 20$

CYCLICITÉ

Calibration d'un AR(2) $X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$. Si $a_2 < 0$ et $a_1^2 + 4a_2 < 0$, alors (X_t) p -périodique avec $p = 2\pi \arccos\left(\frac{a_1}{2\sqrt{-a_2}}\right)$.

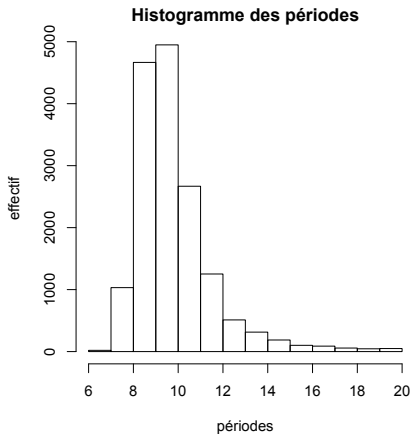
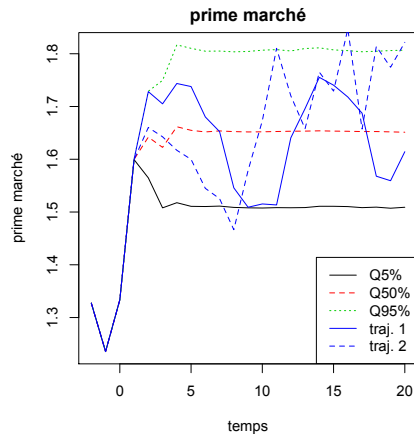


FIGURE: Prime marché

CONCLUSION – MODÈLE DE MARCHÉ

- La théorie des jeux non-coopératifs est adaptée pour modéliser les marchés d'assurance et est une bonne alternative au contrôle optimal.
- Sur une période, deux jeux sont proposés : le plus simple comporte une unique prime d'équilibre, tandis que la version plus complexe admet plusieurs primes d'équilibre.
- Sur plusieurs périodes, le jeu simple répété montre des prix d'équilibre fortement liés. De plus, les trajectoires de la prime marché sont cycliques.

PLAN

1 INTRODUCTION

2 MODÈLE DE MARCHÉ

- Modèle sur une période
- Modèle sur plusieurs périodes

3 MODÈLE DE RISQUE

- Modèle en temps continu
- Modèle en temps discret

4 CONCLUSION

PROCESSUS DE RISQUE

La richesse de l'assureur $(U_t)_t$ au temps t est modélisée par

$$U_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad (6)$$

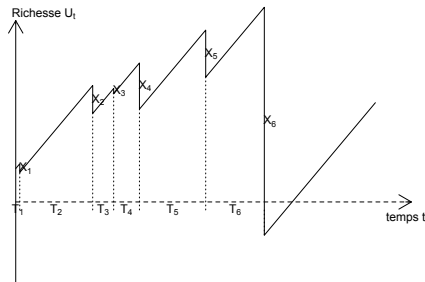
où $u > 0$ est le capital initial, $c > 0$ le taux de prime, $(N_t)_{t \geq 0}$ le nombre de sinistres entre $[0, t]$ et X_i le montant du $i^{\text{ème}}$ sinistre.

Hypothèses de départ :

- 1 $(X_i)_{i \geq 1} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} X$,
- 2 $(X_i)_{i \geq 1} \perp (N_t)_{t \geq 0}$,
- 3 $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson (d'intensité λ).

Probabilité de ruine :

$$\psi(u) \triangleq P(\exists t \geq 0, U_t < 0).$$



CONTEXTE ET ÉTAT DE L'ART

THÉORÈME ([EV82, RSST99])

Dans le modèle de Sparre Andersen, $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de renouvellement : les temps d'inter-occurrence T_i sont i.i.d. selon T . On suppose la condition de profit net $E(X) < cE(T)$.

- *Si les montants et les temps d'inter-occurrence possèdent une f.g.m. M_X, M_T , alors on a pour $u \geq 0$*

$$\psi(u) \leq b_+ e^{-\gamma u} \text{ et } b_+ = \sup_{x \in [0, x_0[} \frac{e^{\gamma x} \bar{F}_Y(x)}{\int_x^{+\infty} e^{\gamma y} d\bar{F}_Y(y)},$$

où γ la solution (positive) de $M_X(r)M_T(-rc) = 1$ et x_0 le supremum de l'ensemble $\{y, F_Y(y) < 1\}$ pour $Y = X - cT$.

- *Notons $F_{X,0}(x) = \int_0^x \bar{F}_X(y) dy / E(X)$. Si F_X et $F_{X,0}$ sont sous-exponentielles (pour $x \rightarrow +\infty$, $\bar{F}^{*2}(x) / \bar{F}(x) \rightarrow 2$), alors*

$$\psi(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{cE(T) - E(X)} \int_u^{+\infty} \bar{F}_X(y) dy.$$

En particulier, $\psi(u) \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} (k/u)^{\alpha-1}$, pour $X \sim \text{Pareto}(k, \alpha)$.

MODÈLE MÉLANGE

Soit Θ une variable (latente) représentant l'incertitude. Les montants de sinistres sont supposés $X_i|\Theta = \theta \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Exponentielle}(\theta)$. Ainsi,

$$P(X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n | \Theta = \theta) = \prod_{i=1}^n e^{-\theta x_i}.$$

PROPOSITION ([ACL11])

Dans ce modèle, les montants $X_1, \dots, X_n$ ont une structure de dépendance donnée par une copule de survie Archimédienne de générateur $\phi = L_{\Theta}^{-1}$. La probabilité de ruine est donnée par

$$\psi(u) = F_{\Theta}(\theta_0) + \int_{\theta_0}^{+\infty} \frac{\theta_0}{\theta} e^{-u(\theta - \theta_0)} dF_{\Theta}(\theta),$$

où $\theta_0 = \lambda/c$.

RAPPELS DES DEUX CAS SPÉCIAUX

[ACL11] considèrent deux lois pour Θ :

1 Si Θ suit une loi Gamma(α, λ), alors

$$\psi(u) = \frac{\gamma(\alpha, \theta_0 \lambda)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\lambda^\alpha \theta_0}{\Gamma(\alpha)} e^{\theta_0 u} \times \frac{\Gamma(\alpha - 1, \theta_0(\lambda + u))}{(\lambda + u)^{\alpha-1}}.$$

2 Si Θ suit une loi Lévy(α), alors

$$\begin{aligned} \psi(u) = & 2\bar{\Phi}(\lambda/\sqrt{2\theta_0}) + \frac{\theta_0\sqrt{u}}{\alpha} e^{u\theta_0} \left[2 \left(1 - \frac{1}{\alpha\sqrt{u}} \right) e^{\alpha\sqrt{u}\bar{\Phi}(d_+\sqrt{2})} \right. \\ & \left. + 2 \left(1 + \frac{1}{\alpha\sqrt{u}} \right) e^{-\alpha\sqrt{u}\bar{\Phi}(d_-\sqrt{2})} - \frac{2}{\sqrt{\pi u\theta_0}} e^{-u\theta_0 - \alpha^2/(4\theta_0)} \right], \end{aligned}$$

où $d_{\pm} = \sqrt{u\theta_0} \pm \alpha/(2\sqrt{\theta_0})$ et $\bar{\Phi}(x) = \int_x^{+\infty} \exp(-t^2/2)dt/\sqrt{2\pi}$.

ASYMPTOTIQUE DE LA PROBABILITÉ DE RUINE

THÉORÈME ([DLL12])

Considérons le modèle précédent où Θ suit une loi continue de densité f_Θ et $\theta_0 = \lambda/c$.

1 Si f_Θ est p.p. différentiable sur $[\theta_0, \infty[$ avec f'_Θ Leb. intégrable, alors $\forall u > 0$,

$$\psi(u) = F_\Theta(\theta_0) + \frac{f_\Theta(\theta_0)}{u} + o\left(\frac{1}{u}\right).$$

2 Si f_Θ est p.p. D^k sur $[\theta_0, \infty[$ avec $f_\Theta^{(k)}$ Leb. intégrable et bornée, alors $\forall u > 0$,

$$\psi(u) = F_\Theta(\theta_0) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{h^{(i)}(0)}{u^{i+1}} + o\left(\frac{1}{u^k}\right),$$

$$\text{où } h^{(i)}(0) = \sum_{j=0}^i (-1)^j \frac{i!}{(i-j)!} \theta_0^j f_\Theta^{(i-j)}(\theta_0).$$

ÉLÉMENTS DE PREUVE.

Intégration par parties + prop. transformée de Laplace



ASYMPTOTIQUE DE LA QUEUE DE DISTRIBUTION

PROPOSITION ([DLL12])

Considérons le modèle précédent où Θ suit une loi continue de densité f_Θ .

- 1** Si f_Θ est p.p. différentiable sur $\mathbb{R}_+$ avec f'_Θ Lebesgue intégrable, alors pour $x > 0$,

$$P(X > x) = \frac{f_\Theta(0)}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

- 2** Si f_Θ possède le développement au voisinage de 0

$$f_\Theta(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k t^{\frac{k+\eta}{\mu}-1},$$

pour $|t| \leq r$ et $\eta, \mu > 0$, alors pour $x > 0$,

$$P(X > x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{+\infty} \Gamma\left(\frac{k+\eta}{\mu}\right) \frac{f_k}{x^{\frac{k+\eta}{\mu}}}.$$

MODÈLE DE RISQUE BINOMIAL COMPOSÉ

La richesse de l'assureur $(U_t)_t$ au temps t est modélisée par

$$U_t = u + t - \sum_{i=1}^t X_i, \quad (7)$$

où $u > 0$ est le capital initial et $X_i \in \mathbb{N}$ le montant du $i^{\text{ème}}$ sinistre.

Hypothèse de départ :

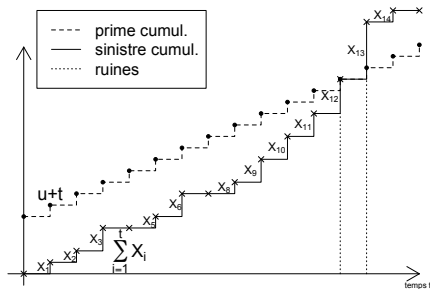
$$\blacksquare (X_i)_i \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} X.$$

Deux définitions de la probabilité de ruine :

$$\psi_G(u) \triangleq P(\exists t \in \mathbb{N}^+, U_t \leq 0 | U_0 = u),$$

et

$$\psi_S(u) \triangleq P(\exists t \in \mathbb{N}^+, U_t < 0 | U_0 = u).$$



MODÈLE MÉLANGE

Soit Θ une variable (latente) représentant l'incertitude. Les montants de sinistres sont supposés $X_i|\Theta = \theta \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Géométrique}(q, e^{-\theta})$. Ainsi,

$$P(X_i = n|\Theta = \theta) = \begin{cases} q & \text{si } n = 0, \\ (1 - q)e^{-\theta} (1 - e^{-\theta})^{n-1} & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour $n \in \mathbb{N}$.

Dans ce modèle, la probabilité de ruine est donnée par

$$\psi(u) = \bar{F}_{\Theta}(\theta_0) + \int_0^{\theta_0} \frac{1 - q}{e^{-\theta}} \left(\frac{1 - e^{-\theta}}{q} \right)^{u+1} dF_{\Theta}(\theta). \quad (8)$$

où $\theta_0 = -\log(1 - q)$.

TROIS CAS SPÉCIAUX – PROBABILITÉ DE RUINE

PROPOSITION ([DLL12])

Considérons le modèle précédent avec une variable Θ positive et $\theta_0 = -\log(1 - q)$.

1 Si Θ suit une loi Exponentielle(λ), alors pour $u \geq 0$

$$\psi(u) = (1 - q)^\lambda + \frac{\lambda(1 - q)}{q^{u+1}} \bar{\beta}(\lambda, u + 1, 1 - q).$$

2 Si Θ suit une loi Gamma(α, λ), $\lambda > 1$, alors pour $u \geq 0$

$$\psi(u) = \frac{\Gamma(\alpha, \lambda \theta_0)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{1 - q}{q^{u+1}} \sum_{j=0}^{u+1} \binom{u+1}{j} (-1)^j \frac{\gamma(\alpha, \theta_0(\lambda + j - 1))}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\lambda}{\lambda + j - 1} \right)^\alpha.$$

3 Si Θ suit une loi Lévy(α), alors pour $u \geq 0$

$$\begin{aligned} \psi(u) = & 2\bar{\Phi}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{2\theta_0}}\right) + \frac{1 - q}{2q^{u+1}} \sum_{j=0}^{u+1} \binom{u+1}{j} (-1)^j \left[e^{\alpha\sqrt{j-1}} \bar{\Phi}\left(d_+(j)\sqrt{2}\right) \right. \\ & \left. + e^{-\alpha\sqrt{j-1}} \bar{\Phi}\left(d_-(j)\sqrt{2}\right) \right], \text{ où } d_{\pm}(j) = \frac{\alpha}{2\sqrt{\theta_0}} \pm \sqrt{j-1}\sqrt{\theta_0}, i^2 = -1. \end{aligned}$$

ASYMPTOTIQUE DE LA PROBABILITÉ DE RUINE

THÉORÈME ([DLL12])

Considérons le modèle précédent où Θ suit une loi continue de densité f_Θ et $\theta_0 = -\log(1 - q)$.

- 1 Si f_Θ est p.p. différentiable sur $[0, \theta_0]$ telle que f_Θ, f'_Θ soient bornées, alors $\forall u \geq 0$

$$\psi(u) = \bar{F}_\Theta(\theta_0) + \frac{1}{u+2} \times \frac{q f_\Theta(\theta_0)}{1-q} + o\left(\frac{1}{u}\right).$$

- 2 Si f_Θ est p.p. D^k sur $[0, \theta_0]$ avec dérivées successives bornées, alors $\forall u \geq 0$

$$\psi(u) = \bar{F}_\Theta(\theta_0) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\tilde{h}^{(i)}(0)}{(u+2) \dots (u+2+i)} + o\left(\frac{1}{u^k}\right),$$

où $\tilde{h}(x) = f_\Theta(-\log(1 - xq))/(1 - xq)^2$.

ÉLÉMENTS DE PREUVE.

Intégration par parties



TROIS CAS SPÉCIAUX – QUEUE DE DISTRIBUTION

PROPOSITION ([DLL12])

Considérons le modèle précédent avec une variable Θ positive et $\theta_0 = -\log(1 - q)$.

1 *Si Θ suit une loi Exponentielle(λ), alors pour $u \geq 0$*

$$P(X > k) = \lambda(1 - q)\beta(\lambda, k + 1).$$

2 *Si Θ suit une loi Gamma(α, λ), $\lambda > 1$, alors pour $u \geq 0$*

$$P(X > k) = (1 - q) \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \frac{\lambda^\alpha}{(\lambda + j)^\alpha}.$$

3 *Si Θ suit une loi Lévy(α), alors pour $u \geq 0$*

$$P(X > k) = (1 - q) \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j e^{-\alpha\sqrt{j}}.$$

PLAN

1 INTRODUCTION

2 MODÈLE DE MARCHÉ

- Modèle sur une période
- Modèle sur plusieurs périodes

3 MODÈLE DE RISQUE

- Modèle en temps continu
- Modèle en temps discret

4 CONCLUSION

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Cette thèse propose

- Une nouvelle modélisation des primes tenant compte de la compétition : elle est à comparer aux principes de prime plus traditionnels et à la théorie du contrôle optimal.
- Un nouveau résultat pour un modèle de sinistres avec dépendance par mélange : $\psi(u) - A \sim B/u$ est à comparer au $\psi(u) \sim e^{-\gamma u}$ (resp. $\psi(u) \sim k/u^\alpha$) pour des lois de sinistres à queue légère (resp. lourde).

De nombreuses extensions sont possibles :

- Prise en compte de l'anti-sélection avec plusieurs classes de risque pour les assurés dans le modèle de marché,
- Application de l'approche mélange et des outils d'analyse à d'autres mesures de ruine (probabilité de ruine en temps fini, fonction Gerber-Shiu) ou d'autres modèles (lois phase-type).

Merci pour votre attention

RÉFÉRENCES



Albrecher, H., Constantinescu, C. et Loisel, S.
Explicit ruin formulas for models with dependence among risks,
Insurance : Mathematics and Economics,
2011.



Embrechts, P. et Veraverbeke, N.
Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility
of large claims,
Insurance : Mathematics and Economics,
1982.



Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. et Teugels, J.
Stochastic Processes for Insurance and Finance,
Wiley Series in Probability and Statistics,
1999.

PROCÉDURES DE TEST POUR LES MODÈLES DE RISQUE

Les observations sont notées $(x_i, t_i)_{1 \leq i \leq n}$ et leur fonction de répartition empirique $F_{X,n}$, $F_{T,n}$ respectivement.

Tests sur la sévérité des sinistres X

- qqplot par rapport à la loi normale et la loi de Pareto,
- tracé du 'Pareto chart' : $\log(1 - F_{X,n}(x_i))$ vs. $\log(x_i)$.

Tests de corrélation entre sinistres

- test d'indépendance, par ex. celui des points tournants sur les deux séries $(x_i)_i$ et $(t_i)_i$,
- tracé du nuage de points $(F_{X,n}(x_i), F_{T,n}(t_i))$ pour détecter une sinistralité de type CAT,
- étudier les somme partielles $\sum_{k=1}^m x_{i_k}$ pour $m < n$ et la loi théorique de $\sum_{k=1}^m X_i$.

CALCUL D'ÉQUILIBRE DE NASH GÉNÉRALISÉ

Les conditions KKT du GNEP

$$\nabla L(x, \lambda) = 0 \text{ et } 0 \leq \lambda \perp -C(x) \leq 0,$$

peuvent se réexprimer de la manière suivante

$$\begin{pmatrix} \nabla L(x, \lambda) \\ \phi(-C(x), \lambda) \end{pmatrix} = 0,$$

où ϕ est une fonction de complémentarité, ∇L et C sont donnés par

$$\nabla L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla_{x_1} O_1(x) + \text{Jac } c_1(x)^T \lambda_1 \\ \vdots \\ \nabla_{x_I} O_I(x) + \text{Jac } c_I(x)^T \lambda_I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ et } C(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ \vdots \\ c_I(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3I},$$